Entwicklung eines impliziten Spannungspunktalgorithmus mit konsistentem Steifigkeitsoperator für das Stoffgesetz nach Li

Moritz Wotzlaw

Ein zentrales Problem der Geotechnik besteht in der Abbildung des mechanischen Verhaltens des Bodens. Wie bei jeder Problemstellung des Ingenieurwesens ist abzuwägen, wie realitätsnah das Modell für eine gegebene Berechnungs- oder Bemessungsaufgabe sein muss. Während für typische Aufgabenstellungen der geotechnischen Praxis, wie der Bemessung von Verbauwänden oder Setzungsberechnungen einfacher Gründungen, einfache Modelle und analytische Methoden in der Regel ausreichend genaue Ergebnisse liefern, steigen mit zunehmender Komplexität der Aufgabenstellungen und zunehmendem Risiko für den Fall „falscher" Rechenergebnisse auch die an das gewählte Modell zu stellenden Anforderungen. Die Materialmodellierung ist deshalb auch nach wie vor Gegenstand intensiver und praxisrelevanter Forschung.

Ein grundlegendes Konzept nicht nur der Stoffgesetzmodellierung in der Bodenmechanik, sondern der Stoffgesetzmodellierung im Allgemeinen, ist das der Elastoplastizität, also der Unterscheidung zwischen reversiblen elastischen und bleibenden plastischen Verformungen. Modelle der klassischen Elastoplastizität definieren typischerweise einen elastischen Bereich (beispielsweise im Hauptspannungsraum) und bezeichnen die Oberfläche dieses Bereichs als Fließfläche. Alle Spannungszustände müssen sich entweder innerhalb des elastischen Bereichs oder auf der Fließfläche befinden. Spannungszustände auf der Fließfläche verursachen plastische Verformungen. Das Entscheidungskriterium, ob sich ein Zustand auf der Fließfläche befindet oder nicht, wird als Fließbedingung bezeichnet. In der vorliegenden Arbeit wird die, eine zylindrische Fließfläche um die hydrostatische Achse beschreibende von-Mises-Fließbedingung (siehe Abbildung 1) als Beispiel für ein klassisches, elastoplastisches Stoffgesetz vorgestellt.

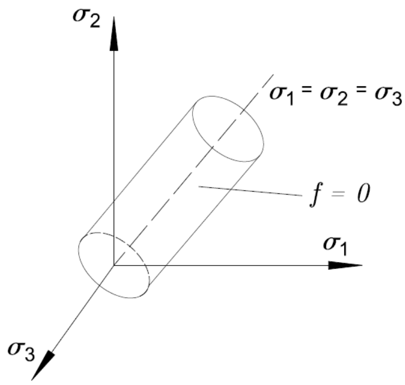

Abbildung 1 – Von-Mises-Fließfläche

Modernere Stoffgesetze der nichtklassischen Elastoplastizität, wie Modelle der Generalisierten Plastizität oder der Grenzflächenplastizität, kommen häufig ohne die ausdrückliche Formulierung einer Fließfläche aus. Zu diesen gehört auch das CSSA-Modell, ein Modell der Grenzflächenplastizität mit Berücksichtigung einer zustandsabhängigen Dilatanz, das für die Modellierung zyklisch belasteter Sande entwickelt wurde und seit langer Zeit Gegenstand der Forschung an der TU Berlin ist.

Komplexe Modelle wie das CSSA-Modell können nur mithilfe computergestützter Rechenverfahren sinnvoll in Praxis und Forschung angewendet werden. Ein solches Verfahren ist die Methode der finiten Elemente (FEM), die u.a., aber bei weitem nicht ausschließlich, zur Lösung mechanischer Anfangsrandwertprobleme genutzt wird. Eine zentrale Problemstellung der statischen FEM ist dabei die Lösung des globalen Gleichgewichts

$$[K][u] = [f]$$

(die Matrix der Steifigkeiten mal dem Vektor der Knotenverschiebungen ergibt den Vektor der äußeren Knotenkräfte).

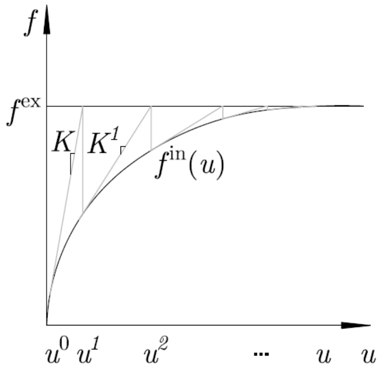

Abbildung 2 – Nichtlineare Gleichgewichtsiteration

Im Fall linear elastischer Stoffgesetze lässt sich dieses Gleichungssystem, bei Vorgabe äußerer Lasten, direkt nach den unbekannten Verschiebungen [u] umstellen, da die Steifigkeiten konstant sind. Bei Verwendung nichtlinearer Stoffgesetze mit veränderlicher Steifigkeit, ist der Gleichgewichtszustand iterativ zu ermitteln (vgl. Abbildung 2). Dazu werden in einem ersten Schritt diejenigen Verformungen berechnet, die unter Ansatz einer gegebenen Steifigkeitsmatrix die Gleichgewichtsbedingung erfüllen würden. Diese Verformungen werden dann genutzt, um die inneren Knotenkräfte zu berechnen, wodurch sich ein neuer Spannungszustand ergibt. Optional ist dann die Berechnung einer neuen Steifigkeits- d.h. Tangentenmatrix möglich, wodurch das Konvergenzverhalten der Iteration verbessert werden kann. Als besonders günstig wird in diesem Zusammenhang die sogenannte konsistente Tangente angesehen.

Die Berechnung des Spannungszustands auf Grundlage eines vorgegebenen Dehnungsinkrements ist Aufgabe der Spannungspunktalgorithmen, die als numerische Umsetzung analytischer Stoffmodelle angesehen werden können. Dabei wird allgemein zwischen expliziten und impliziten Spannungspunktalgorithmen unterschieden. Explizite Algorithmen approximieren den neuen Zustand aufgrund der bereits bekannten gegenwärtigen Zustandsvariablen, während implizite Algorithmen den neuen Zustand mittels der noch unbekannten Zustandsgrößen des neuen Zustands selbst bestimmen, was wiederum nur iterativ möglich ist.

Ein impliziter, in der Literatur verbreiteter Ansatz ist die Anwendung eines Newton-Verfahrens auf der lokalen Ebene eines einzelnen Spannungspunktes. Dazu werden zunächst die wesentlichen, den Zustand des Spannungspunktes beschreibenden Gleichungen, zu denen die Funktion der Spannungen, der plastischen Dehnungen, der verallgemeinerten plastischen Variablen, sowie zuletzt die Fließfunktion selbst gehören, in Abhängigkeit von einem totalen Dehnungsinkrement aufgestellt und anschließend iterativ gelöst. Dieses Vorgehen galt für nichtklassische Stoffgesetze insofern als nicht-anwendbar, da es die explizite Definition einer Fließfunktion zwingend voraussetzte, was bei diesen nicht immer gegeben war. So existierte für das CSSA-Modell bislang lediglich eine Umsetzung mit explizitem Spannungspunktalgorithmus.

Otto Heeres konnte in seiner Dissertation „Modern Strategies for the Numerical Modeling of the Cyclic and Transient Behavior of Soils“ (TU Delft, 2001) jedoch zeigen, dass das Newton- Verfahren auch für nichtklassische Stoffgesetze genutzt werden kann, wenn die Fließbedingung durch eine andere Funktion (die sogenannte Konsistenzbedingung) ersetzt wird, was die Umsetzung eines impliziten Spannungspunktalgorithmus auch für das CSSA-Modell möglich erscheinen ließ.

Ziel dieser Masterarbeit war deshalb zunächst die Entwicklung der theoretischen Grundlagen für die Anwendung eines impliziten Spannungspunktalgorithmus auf das CSSA-Modell, die Implementierung dieses Algorithmus in das FEM-Programmsystem ANSYS® und schließlich die Verifizierung der Implementierung anhand des Vergleichs mit den Ergebnissen tatsächlicher Laborversuche. Zur Optimierung des numerischen Verhaltens sollte in der Implementierung außerdem die bereits erwähnte konsistente Tangente Verwendung finden.

Zur ersten Annäherung an das Problem wurde der von *Heeres* entwickelte Algorithmus auf das klassische von-Mises-Stoffgesetz mit isotroper Verfestigung angewandt. Nach der Herleitung der analytischen Stoffgleichungen, wurden diese diskretisiert und auf die Form des verallgemeinerten Algorithmus gebracht. Ein großer Teil der Arbeit bestand an dieser Stelle darin eine funktionierende Implementierung des Algorithmus in ANSYS® umzusetzen. Schließlich konnte gezeigt, dass das Verfahren grundsätzlich geeignet ist und für gegebene Problemstellungen die erwarteten Lösungen (z.B. im Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Elementversuchs) produziert.

Nach den guten Erfahrungen, die mit dem von-Mises-Stoffgesetz gemacht wurden, widmet sich die Arbeit daraufhin ganz dem CSSA-Modell, das jedoch insofern vereinfacht wurde, als dass lediglich monotone Belastungen betrachtet und die 2. Grenzfläche vernachlässigt werden sollten. Diese Vereinfachungen wurden, um eine bessere Vergleichbarkeit zu ermöglichen, auch auf die vorhandene explizite Originalimplementierung angewandt, die zunächst ausführlich untersucht und beschrieben wurde.

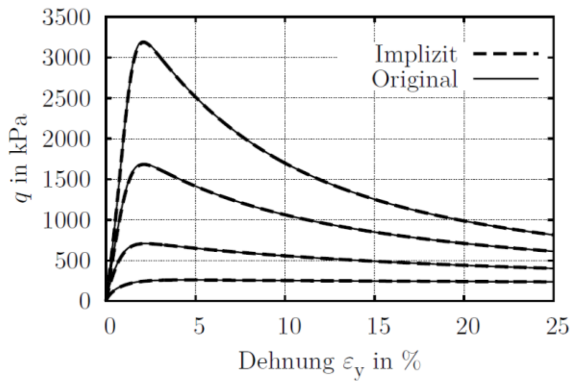

Abbildung 3 – Simulation eines dränierten Triaxialversuchs (Vergleich zwischen impliziter und expliziter Implementierung)

Nachdem die Implementierung des impliziten CSSA-Modells mit konsistenter Tangente verifiziert werden konnte, war der implizite Algorithmus mit Hilfe von Elementversuchen und einem einfachen Randwertproblem, der Setzungsberechnung unter einem Einzelfundament, zu testen und hinsichtlich seiner Leistungsfähigkeit mit der expliziten Originalimplementierung zu vergleichen (Abbildung 3). Dabei konnte festgestellt werden, dass der implizite Algorithmus numerisch stabiler ist, also auch große Lastschrittweiten bei relativ genauen Ergebnissen zulässt, wegen der inneren Iteration jedoch teilweise deutlich längere Rechenzeiten in Anspruch nimmt. Es wurde weiterhin gezeigt, dass die Verwendung der konsistenten Tangente zu einer merklichen Verbesserung des Konvergenzverhaltens führt.

In weiteren Arbeiten sollte allerdings das Modell in seiner originalen Fassung (mit zyklischen Lasten und beiden Grenzflächen) Berücksichtigung finden. Auch ist davon auszugehen, dass der Algorithmus in dieser Form, eine

Umsetzung des einfachen Newton-Verfahrens, Optimierungspotential besitzt, sodass eine Verkürzung der benötigten Rechenzeiten möglich erscheint.