

Das MINI-Element für Fluid-Kornstruktur-gekoppelte Problemstellungen

Christian Carow

Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts werden in den Metropolen dieser Welt die Hochhäuser immer höher, die Tiefgaragen immer tiefer und die Stadtkerne immer dichter. Daher steigen die Anforderungen an die Gründungsstrukturen innerstädtischer Neubauten stetig, während gleichzeitig der zur Verfügung stehende Raum abnimmt. Infolgedessen ergibt sich ein zunehmender Bedarf an präzisen Simulationsverfahren in der Geotechnik. Sie müssen die Tragfähigkeit der Gründungskörper genauer als bisher prognostizieren. Zudem sollen sie verlässlichere Aussagen über die Auswirkungen von Spezialtieftbaumaßnahmen auf die enger zusammenrückende Nachbarbebauung erlauben. Dies motiviert die Entwicklung einer neuartigen numerischen Simulationsmethode, die am Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik der Technischen Universität Berlin als DFG-Forschungsvorhaben erfolgt. Das Forschungsvorhaben zielt darauf ab, die Herstellung von Rüttel-Injektions-Pfählen sowie weitere geotechnische Herstellvorgänge zu simulieren. Dafür werden verschiedene Konzepte der Mechanik und der numerischen Mathematik benutzt. Ein Kernbestandteil ist die Finite-Elemente-Methode (FEM).

Der vorliegende Aufsatz ist die Kurzfassung einer Masterarbeit, die sich mit einem Teilaspekt der Anwendung der FEM in dem Forschungsvorhaben befasst. Die FEM ist ein Verfahren, Anfangsrandwertprobleme (ARWP), die auf

partiellen Differentialgleichungen basieren, numerisch zu lösen. Dazu wird das zu untersuchende Gebiet durch ein Netz finiter Elemente unterteilt. Die Werte der gesuchten physikalischen Größen an den Knotenpunkten des FE-Netzes sind die Freiheitsgrade des Systems. Diese Knotenwerte treten bei der numerischen Lösung als Unbekannte an die Stelle der kontinuierlich verteilten physikalischen Größen. Der Verlauf der Größen zwischen den Knoten wird mit Ansatzfunktionen approximiert. So ermöglicht die FEM, für ein ARWP ein System algebraischer Gleichungen aufzustellen, das als Unbekannte nur die Knotenwerte enthält und gelöst werden kann.

Ein wesentlicher Vorzug der FEM besteht darin, dass der Aufbau der Gleichungssysteme sehr effizient zu realisieren ist. Man setzt dabei das globale Gleichungssystem eines ARWP schrittweise aus den Beiträgen der einzelnen Elemente zusammen. Diese lassen sich mit geringem Aufwand aus einem Einheits-element ableiten, dessen Elementgleichungssystem in standardisierter Form hinterlegt wird. Dieses Elementgleichungssystem ergibt sich aus der Anwendung der Eigenschaften des gewählten Elementtyps auf das jeweils vorliegende physikalische Problem.

Das Ziel der Masterarbeit, deren Kurzfassung hier vorliegt, besteht nun darin, einen speziellen Typ finiter Elemente auf eine Problemstellung aus dem Forschungsvorhaben anzuwenden. Es

handelt es sich um das sogenannte MINI-Element, das im Bereich der Strömungsmechanik entwickelt wurde. Um dies genauer erläutern zu können, bedarf es zunächst einiger Vorbemerkungen.

Das MINI-Element ist ein Elementtyp für gekoppelte Problemstellungen. Eine gekoppelte Problemstellung zeichnet sich dadurch aus, dass Freiheitsgrade unterschiedlicher Art, beispielsweise Verschiebungen und Druck, auftreten. Ein solches Problem ergibt sich auch aus dem Kontext des Forschungsvorhabens. Es besteht in der Modellierung des Verformungsverhaltens wassergesättigter Böden unter statischen und dynamischen Beanspruchungen, wobei die Interaktion zwischen dem Porenwasser und dem Korngerüst zu berücksichtigen ist. Hierfür existiert ein physikalisches Modell, dessen gekoppelte Differentialgleichungen als primäre Variable die Verschiebungen des Korngerüsts u sowie den Porenwasserdruck p nutzen. Es trägt folglich die Bezeichnung u-p-Modell.

Bei der numerischen Lösung von ARWP auf Basis des gekoppelten u-p-Modells mittels der FEM können numerische Probleme auftreten. Sie äußern sich in physikalisch falschen Oszillationen des Porenwasserdruckes. Sie lassen sich vermeiden, indem ein finites Element verwendet wird, dessen Ansatzfunktionen für die Verschiebung einen höheren Polynomgrad aufweisen als jene für den Porenwasserdruck. Beispielsweise ist ein Element wie das Dreieckselement T3P3, das Abbildung 1 zeigt, problematisch. Es hat nur drei Knoten mit jeweils zwei Verschiebungsfreiheitsgraden und einem Druckfreiheitsgrad. Folglich kann T3P3 lediglich mit linearen Ansatzfunktionen für die Verschiebung und den Porenwasserdruck ausgestattet werden. Hingegen sollte das Dreieckselement T6P3, das gleichfalls in Abbildung 1

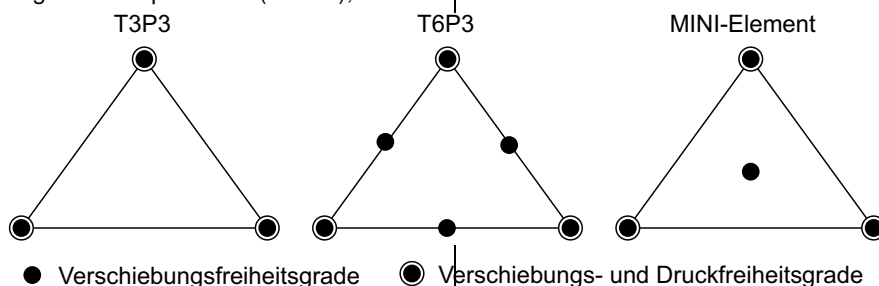


Abbildung 1: Elementtypen

dargestellt ist, keine Probleme bereiten, denn es beinhaltet quadratische Ansatzfunktionen für die Verschiebung und lineare für den Porenwasserdruck. Deshalb weist es 6 Knoten mit Verschiebungsfreiheitsgraden, aber nur drei mit einem zusätzlichen Druckfreiheitsgrad auf.

Elemente wie das T6P3 sind jedoch für die Verwendung in dem Forschungsvorhaben nicht geeignet. Daher wird auf das MINI-Element zurückgegriffen, von dem ebenfalls ein numerisch unproblematisches Verhalten zu erwarten ist. Beim MINI-Element werden zwar, wie beim T3P3, für Verschiebungen und Porenwasserdruck einfache lineare Ansätze gemacht. Das MINI-Element verfügt aber zusätzlich über eine Stabilisierungsfunktion. Die Stabilisierungsfunktion wird durch einen im Inneren des Dreieckes platzierten vierten Knoten erzeugt, wie in Abbildung 1 veranschaulicht. Der innere Knoten weist nur Verschiebungsfreiheitsgrade auf und ist mit einer kubischen Ansatzfunktion ausgestattet. Er beeinflusst aufgrund seiner Lage keines der benachbarten Elementen

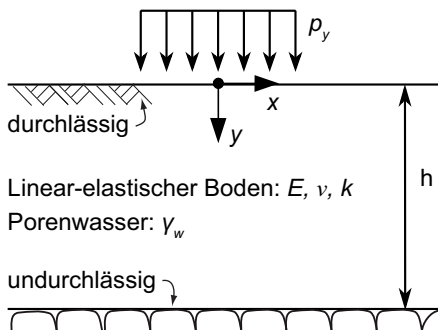


Abbildung 2: Problemstellung der Verifikationsberechnung

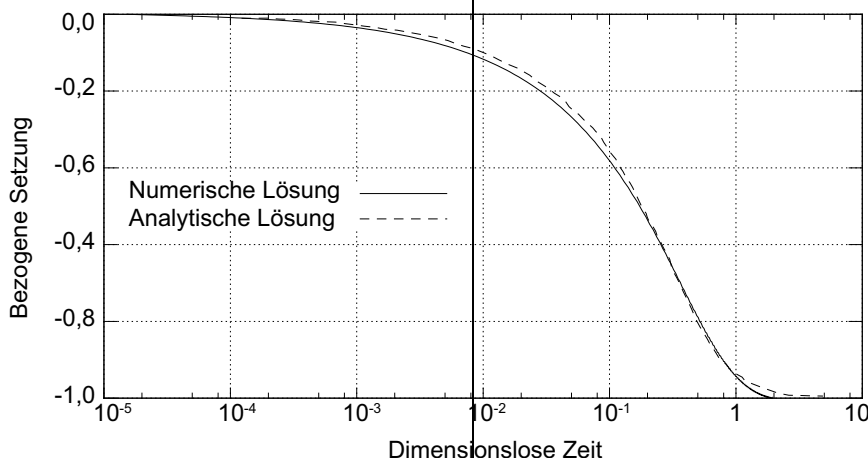


Abbildung 3: Ergebnis der Verifikationsberechnung

te. Daher können seine Freiheitsgrade aus dem FE-Gleichungssystem eliminiert werden, was man als Kondensation bezeichnet. Das reduziert den Berechnungsaufwand und ist Voraussetzung für die Verwendung des Elementes in dem Forschungsvorhaben.

Um das MINI-Element für das Forschungsvorhaben zu erschließen, wird in der Masterarbeit wie folgt vorgegangen. Zunächst werden die Differentialgleichungen des u-p-Modells anhand von Literaturangaben und unter Rückgriff auf andere Arbeiten des Fachgebietes Grundbau und Bodenmechanik der Technischen Universität Berlin hergeleitet. Mit Hilfe der Gleichungen wird ein ARWP in allgemeiner Form aufgestellt. Das ARWP wird zur Vorbereitung der Diskretisierung in eine schwache Form überführt. Die schwache Form des ARWP wird zunächst ohne Festlegung auf einen bestimmten Elementtyp mit der FEM räumlich diskretisiert. Für die zeitliche Diskretisierung werden das Newmark-Verfahren und das Trapez-Verfahren angewandt. Da beliebige nichtlineare Materialgesetze zu berücksichtigen sind, wird zur Lösung des Problems auf die iterative Newton-Raphson-Methode zurückgegriffen.

Im nächsten Schritt der Arbeit werden aus der Literatur die Merkmale des MINI-Elementes zusammengetragen. Sie werden für den zweidimensionalen Fall ebener Dehnungen auf die allgemeine Form des diskretisierten ARWP angewandt. Daraus ergibt sich ein Elementgleichungssystem. Ferner wird gezeigt, wie die Bestandteile dieses Elementgleichungssystems mit Hilfe

numerischer Integration auszurechnen sind. Außerdem wird darauf eingegangen, wie die Freiheitsgrade des inneren Knotens aus dem Gleichungssystem herauskondensiert werden können. Das Ergebnis der theoretischen Betrachtungen ist das kondensierte Gleichungssystem des MINI-Elementes für Fluid-Kornstruktur-gekoppelte Problemstellungen.

Zuletzt wird in der Arbeit auch die rechen-technische Umsetzung des MINI-Elementes behandelt. Sie soll als Implementierung innerhalb des FE-Programmsystems ANSYS® erfolgen. Daher wird in der Masterarbeit die Schnittstelle von ANSYS® für benutzerdefinierte Elemente untersucht. Darauf aufbauend wird die Implementierung des MINI-Elementes entworfen.

Zusätzlich zu den theoretischen Untersuchungen bezüglich des MINI-Elementes und dem Entwurf der Implementierung erfolgte im Rahmen der Arbeit auch eine teilweise Umsetzung der Implementierung. Sie ist insofern nicht vollständig, als die Anteile des inneren Knotens außer Acht gelassen worden sind. Mit dieser Vorstufe der Implementierung des MINI-Elementes sind Verifikationsberechnungen durchgeführt worden. Eines der Verifikationsbeispiele ist die Konsolidierung eines elastischen Halbraumes aus wassergesättigtem Boden unter einem Streifenfundament. Für das Problem, das hier in Abbildung 2 skizziert ist, steht in der Literatur eine exakte analytische Lösung zur Verfügung. Die Nachrechnung mit der ANSYS®-Implementierung kann die analytische Lösung ausgezeichnet nachbilden, wie Abbildung 3 illustriert.

Anhand dieses und weiterer Verifikationsbeispiele wird in der Masterarbeit belegt, dass die Implementierung fehlerfrei funktioniert und die theoretischen Ausführungen weitestgehend korrekt sind. Bei der Vorstufe der Implementierung des MINI-Elementes wurden aber erwartungsgemäß numerische Probleme festgestellt. Daher soll sie im nächsten Arbeitsschritt gemäß den in der Arbeit gemachten Vorschlägen vervollständigt werden.

Kontakt:
christian.carow@tu-berlin.de