Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Elemente Formulierung für Eindringvorgänge in Sandböden

Dipl.-Ing. Daniel Aubram, Technische Universität Berlin, e-mail: daniel.aubram@tu-berlin.de

1. Einleitung

Untersuchungen mit modernen Messmethoden haben gezeigt, dass die Herstellung von Grundbauwerken und das Herstellungsverfahren der einzelnen Bauteile einen wesentlichen Einfluss auf die Zustandsänderungen im Baugrund haben, ihre Abbildung in den meisten Prognoseberechnungen allerdings unberücksichtigt bleibt. Die Herstellung von Verdrängungspfählen gehört hierbei zu den ältesten und zugleich kompliziertesten Problemstellungen in der Bodenmechanik und ist durch ein gemeinsames Auftreten großer lokaler Verformungen in der Nähe der Pfahlspitze und nichtlinearem mechanischen Verhalten des umgebenden Bodens gekennzeichnet.

Kontinuumsmechanische Ansätze zur Beschreibung des Eindringvorgangs können numerisch mit der weit verbreiteten Finite Elemente Methode gelöst werden. Allerdings weisen die klassischen Lagrangeschen und Eulerschen Formulierungen der Finiten Elemente einige Nachteile auf. Unter Verwendung der Lagrangeschen Formulierung, welche standardmäßig in der Strukturmechanik angewendet wird, können starke Elementverzerrungen hervorgerufen werden, weil das Elementnetz mit dem Material verschmolzen ist (Abbildung 1). Häufig wird die numerische Berechnung in ihrer Stabilität und Genauigkeit beeinflusst oder sogar abgebrochen. Bei der Eulerschen Formulierung, die hauptsächlich in der Strömungsmechanik angewendet wird, ist die Diskretisierung des betrachteten Gebiets raumfest. Die Nachteile liegen in der Schwierigkeit freie Oberflächen und sich ändernde Berandungen einzubeziehen, weil Elementnetz und Material vollständig entkoppelt sind.

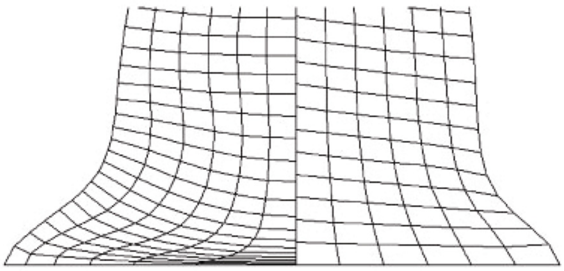

Abbildung 1: Schnitt durch einen zylindrischen Metallstempel nach Druck auf eine starre Fläche. *links:* Lagrange Netz, *rechts:* ALE Netz (Ausschnitt, aus Aymone (2004)).

Der Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Finite Elemente Formulierung gelingt es durch eine Kombination die Vorteile beider Betrachtungsweisen zu nutzen. Die reine Lagrangesche und die reine Eulersche Formulierung bilden Spezialfälle des ALE Konzepts. Nach ersten Anwendungen in den späten 1970er Jahren (Donea et al., 1977; Hughes et al., 1981) wurde die ALE Formulierung in den letzten 20 Jahren vor allem auf den Gebieten der Strömungsmechanik und der Metallumformung zu einer leistungsfähigen Berechnungsmethode entwickelt (Huétink et al., 1990; Rodríguez-Ferran et al., 2002; Donea et al., 2004). Die Anwendung auf geotechnische Probleme blieb bisher die Ausnahme und bezog vergleichsweise einfache Stoffgesetze für den Boden ein (Van den Berg, 1994; Hu & Randolph, 1998; Susila & Hryciw, 2003).

Neben einer geeigneten Diskretisierung des betrachteten Gebiets, um die nichtlineare Kinematik der Pfahleindringung zu erfassen, muss auch das mechanisch nichtlineare Verhalten des Bodens berücksichtigt werden. Die Stoffgesetzformulierung ist besonders für Sand schwierig, weil sein mechanisches Verhalten sowohl von der Lagerungsdichte, als auch vom Spannungszustand und der Spannungsgeschichte abhängt. Moderne Stoffgesetze simulieren mit nur einem Satz von Materialparametern das mechanische Verhalten von Sand sowohl unter monotonen, als auch zyklischen Belastungen über einen weiten Dichte- und Spannungsbereich. Dies konnte vor allem durch Einbeziehen der Porenzahl als Zustandsgröße erreicht werden. Für die Anwendung der ALE Formulierung sollte das Stoffgesetz für große Verformungen ausgelegt sein, was in der Bodenmechanik allerdings nur von wenigen Materialgesetzformulierungen geleistet wird.

2. Der ALE Operator

Der Begriff „Arbitrary Lagrangian-Eulerian“ bezeichnet eine spezielle Formulierung der Kinematik eines materiellen Körpers B, welcher aus offenen Mengen von Materialpartikeln P besteht und durch die Zeit t parametrisierte Platzierungen im Euklidischen Raum E_n besitzt. Zu einem festen Bezugszeitpunkt t_0 kann jedes $P \in B$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{X}(P) \in \widetilde{D}$ der sogenannten Ausgangsplatzierung $\widetilde{D}(B,t_0) \subset E_n$ identifiziert werden. Bei Ausschluss von Durchdringungen und Überschneidungen des Materials besteht zwischen $\mathbf{X}$ und dem Ortsvektor $\mathbf{x}(P,t) \in D$ der Momentanplatzierung $D(B,t)$ der invertierbare Zusammenhang $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X},t)$. Aufgrund der Eineindeutigkeit lässt sich eine am Partikel P definierte physikalische Feldgröße β sowohl durch $\beta = \widetilde{\beta}(\mathbf{X},t)$, als auch durch $\beta = \beta(\mathbf{x},t)$ darstellen. Die erste Variante heißt Lagrangesche, die zweite Variante Eulersche Beschreibung der Feldgröße.
Die aufgeführten Zusammenhänge werden bei der ALE Formulierung dahingehend verallgemeinert, dass ein vom Körper und seiner Platzierung unabhängiges und zeitlich veränderliches Referenzgebiet $\widehat{D}$ zur Beschreibung der Feldgröße β verwendet wird (Abbildung 2).

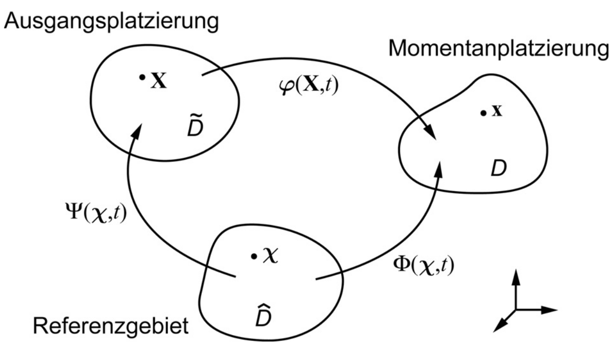

Abbildung 2: Darstellung von Ausgangsplatzierung, Momentanplatzierung und Referenzgebiet und ihren gegenseitigen Abbildungen im Euklidischen Raum.

Das Referenzgebiet, anschaulich als feinmaschiges Gitter deutbar, ist grundsätzlich frei wählbar, muss sich jedoch auf eineindeutige Weise auf die Ausgangsplatzierung und Momentanplatzierung des Körpers abbilden lassen. Bezeichnet $\chi(G,t) \in \widehat{D}$ den Ortsvektor eines Gitterpunkts G im Euklidischen Raum und $\mathbf{X} = \Psi(\chi,t)$ sowie $\mathbf{x} = \Phi(\chi,t)$ die geforderten Abbildungen, so lässt sich die Bewegungsfunktion darstellen als $\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1}$. Mit $\beta = \widehat{\beta}(\chi,t) = \widehat{\beta}(\Psi^{-1}(\mathbf{X},t),t)$ als Darstellung der Feldgröße im Referenzsystem ergibt sich aus ihrer materiellen Zeitableitung nach einigen Umformungen der fundamentale ALE Operator

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{\beta}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathbf{X}} = \left.\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial t}\right|_{\chi} + \frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{c}\ ,$$

wobei $\mathbf{c} := \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ die sogenannte konvektive Geschwindigkeit, $\mathbf{v} := \partial\varphi/\partial t|_{\mathbf{X}}$ die Partikelgeschwindigkeit und $\hat{\mathbf{v}} := \partial\Phi/\partial t|_{\chi}$ die Gittergeschwindigkeit sind. Die materielle Zeitableitung einer Feldgröße besteht also aus der lokalen Zeitableitung bezüglich festgehaltener Referenzkoordinaten und einem konvektiven Anteil infolge der Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel $\mathbf{X}$ und Gitterpunkt χ am Ort $\mathbf{x}$.

Zur Lösung allgemeiner mechanischer Randwertprobleme unter Verwendung der ALE Formulierung müssen in den Bilanzgleichungen die materiellen Zeitableitungen sämtlicher Größen im Sinne des ALE Operators umgeschrieben werden. Reduziert man das Problem auf quasistatische Aufgabenstellungen aus der inelastischen Strukturmechanik, wie im hier beschriebenen Forschungsprojekt zur Pfahleindringung in Sand, so müssen lediglich die Zeitableitungen in den beteiligten Stoffgleichungen angepasst werden – konkret sind das die objektive Spannungsrate bei hypoplastischen Stoffgesetzen und die Fließregel bei hyperelastoplastischen Stoffgesetzen.

3. Numerische Umsetzung

Für die numerische Umsetzung der ALE Formulierung mit der Finite Elemente Methode wird das Elementnetz als Referenzgebiet gewählt. Die Schwierigkeit liegt in der korrekten Erfassung und Behandlung der konvektiven Terme bei inelastischen Materialmodellen, die sich aus der unabhängigen Bewegung des Elementnetzes ergeben. Hier erweist es sich als sinnvoll den ALE Operator in einen Lagrange Schritt und einen Konvektionsschritt zu „splitten“ (Benson, 1989).

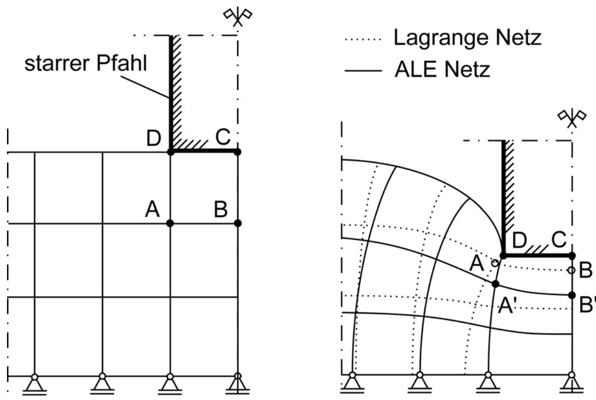

Abbildung 3: Prinzipskizze zur Neuanordnung der Knoten bei unveränderter Netztopologie. *links:* Unverformtes Element ABCD, *rechts:* Verformtes Element ABCD (Lagrangesche Formulierung) und entzerrtes Element A’B’CD (ALE Formulierung).

Bei der Durchführung des Lagrange Schritts wird die Materialkonvektion verhindert, weil nur die linke Seite des ALE Operators, also die materielle Zeitableitung integriert wird. Das entspricht gerade dem Ablauf in Finite Elemente Programmen auf der Grundlage der Lagrangeschen Formulierung. Das nichtlineare Materialmodell wird in üblicher Weise einbezogen. Im anschließenden Konvektionsschritt wird das Elementnetz entzerrt und die Zustandsvariablen auf das modifizierte Netz abgebildet. Da bei der Netzentzerrung keine neuen Knoten oder Elemente hinzugefügt werden, bleibt die Netztopologie, d.h. die Anordnung der Knoten und Elemente zueinander, unverändert (Abbildung 3). Besondere Be-

achtung muss in diesem Schritt den Rand- und Kontaktbedingungen zukommen. Nach der Netzanpassung werden die Zustandsgrößen vom alten Netz auf das geglättete Netz mechanisch konsistent unter Berücksichtigung der Konvektion übertragen. Die Ermittlung des Gradienten im Konvektionsterm des ALE Operators erfordert besondere Aufmerksamkeit, weil bis auf die Verschiebungen sämtliche Zustandsgrößen nicht an den Elementknoten, sondern an den Gaußpunkten gegeben sind und daher unstetig über die Elementränder verlaufen.
Der Vorteil der Split-Methode liegt darin, dass herkömmliche Finite Elemente Programme auf der Grundlage der Lagrangeschen Formulierung erweitert werden können. Vor dem Hintergrund der notwendigen Eingriffsmöglichkeiten wurde das Finite Elemente Programmsystem ANSYS für die Implementierung des ALE Konzepts ausgewählt.
Das anhand von Versuchen validierte Simulationsmodell der Pfahleindringung in Sandböden soll zum Einen die wirklichkeitsnahe Prognose der Spannungs- und Verformungsänderungen in rolligen Böden ermöglichen, zum Anderen soll die Entwicklung des Materialzustandes, insbesondere der Lagerungsdichte des Sandes während des Eindringprozesses sowie der Endzustand untersucht werden.

4. Literaturhinweise

Aymone, J. L. F. (2004): Mesh motion techniques for the ALE formulation in 3D large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 1879-1908
Benson, D. J. (1989): An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, pp. 305-350
Donea, J., Fasoli-Stella, P., Giuliani, S. (1977): Lagrangian and Eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems. *Trans. 4th International Conference on SMIRT*, Vol. B, pp. 1-12
Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J.-Ph., Rodríguez-Ferran, A. (2004): Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, E. Stein et al. (eds.), John Wiley & Sons, New York
Hu, Y., Randolph, M. F. (1998): A Practical Numerical Approach for Large Deformation Problems in Soil. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 22, pp. 327-350
Huétink, J., Freede, P. T., van der Lugt, J. (1990): Progress in mixed Lagrangian-Eulerian finite element simulation of forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1441-1457
Hughes, T. J. R., Liu, W. K., Zimmermann, T. K. (1981): Lagrangian-Eulerian formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, pp. 329-349
Rodríguez-Ferran, A., Pérez-Foguet, A., Huerta, A. (2002): Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for hyperelastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 00, pp. 1-30
Susila, E., Hryciw, R. D. (2003): Large displacement FEM modelling of the cone penetration test (CPT) in normally consolidated sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 27, pp. 585-602
Van den Berg, P. (1994): *Analysis of soil penetration*. PhD Thesis, Delft University, The Netherlands