

Skript

Numerische Verfahren in der Geotechnik

Daniel Aubram

Sommersemester 2016

Version 13.07.2016

Kontaktdaten des Autors:

Dr.-Ing. Daniel Aubram
Technische Universität Berlin
Fachgebiet Grundbau und Bodenmechanik
Skr. TIB1-B7, Gebäude TIB13B
Gustav-Meyer-Allee 25
13355 Berlin
E-Mail: *daniel.aubram@tu-berlin.com*

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
1 Einführung	1
1.1 Worum geht es?	1
1.2 Verfahren und Methoden	2
1.2.1 Übersicht	2
1.2.2 Methoden für Randwertprobleme	3
1.3 Besonderheiten der Geotechnik	4
1.4 Literaturempfehlungen	5
1.5 Schreibweisen und Konventionen	6
Literaturverzeichnis	7
2 Exkurs Kontinuumsmechanik	9
2.1 Allgemeine Bemerkungen	9
2.2 Mathematische Grundlagen	11
2.2.1 Vektorräume und lineare Abbildungen	11
2.2.2 Affine Punkträume und Koordinaten	15
2.2.3 Tensoralgebra	17
2.2.4 Felder und Tensoranalysis	23
2.3 Kinematik	27
2.3.1 Bewegung eines Körpers im Raum	27
2.3.2 Verformung und Verzerrung	28
2.4 Bilanzgleichungen	30
2.4.1 Allgemeine Formen	30
2.4.2 Massenbilanz (Massenerhaltungssatz)	31
2.4.3 Impulsbilanz und Spannungstensor	32
2.5 Konstitutive Gleichungen	33
3 Materialmodelle für Böden	35
3.1 Allgemeine Bemerkungen	35
3.1.1 Modelle sind Theorien	35
3.1.2 Modellannahmen für Boden	36
3.1.3 Spannungs- und Dehnungsinvarianten	37
3.2 Elastische Modelle	42
3.2.1 Lineare Elastizität	42
3.2.2 Nichtlineare Elastizität	45

3.3	Elastisch-Plastische Modelle	46
3.3.1	Modellkomponenten	46
3.3.2	Fließ- und Bruchkriterien	48
3.3.3	Herleitung des Steifigkeitstensors	52
4	Grundlagen der Finite Elemente Methode	55
4.1	Schwache Form des Anfangsrandwertproblems	55
4.1.1	Mechanisches Anfangsrandwertproblem	55
4.1.2	Schwache Formulierung (virtuelle Arbeit)	56
4.2	Räumliche Diskretisierung	58
4.2.1	Matrixschreibweise	58
4.2.2	Finite Elemente Approximation	60
4.2.3	Semi-Diskrete Schwache Form	62
4.2.4	Transformationsregeln und numerische Integration	63
4.2.5	Ebene und rotationsymmetrische Probleme	64
4.3	Zeitliche Diskretisierung	67
4.4	Lineare statische Probleme	68
4.4.1	Elementgleichungssystem	68
4.4.2	Zusammenbau des Gesamtgleichungssystems	68
5	Methoden für spezielle Probleme	71
5.1	Nichtlineare statische Probleme	71
5.1.1	Iteration des Gleichgewichts	71
5.1.2	Newton-Raphson-Verfahren und Linearisierung	72
5.1.3	Liniensuchverfahren (Line Search)	73
5.1.4	Integration elasto-plastischer Materialmodelle	74
5.2	Transiente Probleme	82
5.2.1	Implizite Zeitintegration	82

Kapitel 1

Einführung

1.1 Worum geht es?

In der Geotechnik, insbesondere bei der Bemessung von Grundbauwerken, sucht man nach Antworten auf die üblichen Fragen an einen Bauingenieur:

1. Versagt das Bauwerk bzw. der Baugrund?
2. Wie groß sind die Verformungen?
3. Welche Risiken bzw. Auswirkungen gibt es?

Die Antwort auf die erste Frage ist verknüpft mit dem Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit (Ultimate Limit State – ULS), die Antwort auf die zweite Frage hingegen mit dem Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (Serviceability Limit State – SLS) und die Antwort auf die dritte Frage definiert schließlich die Anforderungen bzw. die Geotechnische Kategorie (GK) des Bauvorhabens gemäß DIN EN 1997-1 (Eurocode 7) und DIN 1054. Die Bemessung nach den beiden genannten Normen und weiteren geotechnischen Bemessungsrichtlinien wird ausführlich in den Grundveranstaltungen des Bachelorstudiengangs Bauingenieurwesen (Grundbau und Bodenmechanik I, II) an der TU Berlin behandelt.

Die allgemeine Antwort eines Akademikers auf die oben gestellten Fragen („Das kommt darauf an.“) ist zwar auch hier richtig, aber nicht zielführend. Andererseits sind qualitative Aussagen wie „Die Böschung ist standsicher.“ oder „Die Einbindetiefe der Wand ist zu gering.“ oft nicht ausreichend und quantitative Aussagen schwierig („Wie verformt sich die Wand?“ oder „Wie groß ist die Setzung des Fundaments?“). Gerade für letztere sind ein geeignetes Rechenverfahren und eine möglichst genaue Beschreibung des Problems bzw. Prozesses erforderlich.

Gegenstand der Betrachtung sind physikalische Größen wie Spannung und Lagerungsdichte, deren Werte generell vom Ort und auch von der betrachteten Zeit abhängen. Beispielsweise möchte man bei einem Streifenfundament auf einem Baugrund mit einer bindigen Bodenschicht wissen, wie groß die Setzung zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort ist. Präzise und allgemeiner gesprochen sucht man die Lösung

eines *Anfangsrandwertproblems (ARWP)*. Ein ARWP stellt die mathematische Modellierung eines speziellen physikalischen Problems bzw. Prozesses dar und ist gegeben durch:

- Eine Differentialgleichung oder ein System von Differentialgleichungen, welches das Verhalten der betrachteten orts- und zeitabhängigen Größen beschreibt.
- Anfangsbedingungen (AB) für die Größen.
- Randbedingungen (RB) für die Größen.

Liegen nur ortsabhängige Größen vor, so spricht man von einem *Randwertproblem (RWP)*. Ein *Anfangswertproblem (AWP)* wird hingegen durch Größen beschrieben, die ausschließlich zeitabhängig sind. Im letztgenannten Fall sind die zugrunde liegenden Gleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen, anderenfalls im Allgemeinen partielle Differentialgleichungen.

1.2 Verfahren und Methoden

1.2.1 Übersicht

Anfangsrandwertprobleme bzw. Randwert- oder Anfangswertprobleme können grundsätzlich mit unterschiedlichen Verfahren gelöst werden.

Analytische Verfahren Geschlossene Lösung eines Problems. Differentialgleichung, Anfangs- und Randbedingungen werden überall und zu jedem Zeitpunkt exakt erfüllt. Beispiele: Eindimensionale Konsolidierungstheorie (Zeitsetzungstheorie), Direkte Setzungsberechnung, Grundbruchtheorie. Nachteile: Nur für sehr spezielle Problemstellungen; für sehr viele praktische Probleme lassen sich keine analytischen Lösungen finden.

Semi-analytische/-empirische Verfahren Kombination aus analytischen Verfahren und ergänzenden Daten von Feld-, Labor- und/oder Modellversuchen. Beispiele: Indirekte Setzungsberechnung; Formel für Sondierspitzenwiderstand. Nachteile: Nur für sehr spezielle Problemstellungen; Datengrundlage entscheidend.

Numerische Verfahren Lösung eines Problems mittels Approximationsverfahren. Beispiele folgen später. Nachteile: Fehler der Approximation; Effizienz, Stabilität, Robustheit der implementierten Methoden; hohe Komplexität (Mechanik, Numerische Mathematik, Informatik, etc.).

Innerhalb der numerischen Verfahren gibt es Methoden für spezielle Aufgaben. Häufig erforderlich sind Methoden zur Lösung von AWP (z.B. explizite oder implizite Euler-Methoden, Runge-Kutta-Methode, Trapez-Methode, Newmark-beta-Methode), Methoden zur Lösung von RWP (z.B. Finite Elemente Methode, Finite Differenzen Methode, Randelementemethode, Diskrete Elemente Methode), sowie Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen (z.B. Newton-Raphson-Methode, Line Search).

1.2.2 Methoden für Randwertprobleme

Finite Elemente Methode

Das Grundprinzip der Finite Elemente Methode (engl.: finite element method, kurz: FEM) ist das sogenannte Variationsprinzip bzw. die „schwache“ Formulierung der betrachteten Differentialgleichung. Hierbei wird die Differentialgleichung mit einer Testfunktion multipliziert, welche die Randbedingungen exakt erfüllt. Die schwache Form erfüllt die DGL dann im integralen Mittel.

Das Berechnungsgebiet wird approximiert durch nicht-überlappende Elementargebiete (Finite Elemente Netz), und die Verteilung einer Größe im Element wird approximiert durch die Werte an den Elementknoten und zugehörigen Interpolationsfunktionen (sog. Ansatz). Man spricht in diesem Zusammenhang von der räumlichen Diskretisierung des Problems. Liegt ein Anfangsrandwertproblem vor, so muss dieses auch zeitlich diskretisiert werden. Ist das Problem außerdem nichtlinear, so ist eine Linearisierung erforderlich, bevor das resultierende lineare Gleichungssystem gelöst werden kann.

Der größte Vorteil der FEM ist ihre universelle Einsetzbarkeit. Sie findet heute eine breite Anwendung in nahezu allen Bereichen der Ingenieur- und Naturwissenschaften. In der Ingenieurpraxis ist die FEM als Standardwerkzeug anerkannt. Als ein Nachteil wird gelegentlich erwähnt, dass die Finite Elemente Methode vergleichsweise rechenintensiv ist. Für sehr komplexe Probleme im Bereich des Höchstleistungsrechnens (z.B. Wettervorhersagen) kommen daher auch heute noch Finite Differenzen Methoden zum Einsatz.

Finite Differenzen Methode

Bei der Finite Differenzen Methode (engl.: finite difference method, kurz: FDM) werden Ableitungen, d.h. Differentialquotienten, in den Differentialgleichungen durch bestimmte Differenzenquotienten approximiert. Hierfür werden das Berechnungsgebiet durch ein strukturiertes Gitter diskretisiert und geeignete Randbedingungen an den Gebietsrändern formuliert. Je nach gewähltem Differenzen-Schema (Ansatz) werden die Werte einer Größe an benachbarten Gitterpunkten herangezogen, um die Differenzenquotienten zu bilden. Das dadurch entstehende lineare Gleichungssystem wird anschließend gelöst.

Finite Differenzen Methoden zeichnen sich durch ihre Anschaulichkeit und den geringen Aufwand bei der numerischen Implementierung aus. Für komplizierte bzw. unregelmäßige Geometrien sind sie jedoch ungeeignet, weil diese im Allgemeinen nicht strukturiert sondern nur unstrukturiert vernetzt werden können (d.h. kein regelmäßiges Gitter).

Randelementemethode

Die Randelementemethode (engl.: boundary element method, kurz: BEM) wendet das Prinzip von Trefftz an. Im Gegensatz zum Prinzip von Ritz, welches die Grundidee der

FEM verkörpert, werden nicht die Differentialgleichungen des Randwertproblems, sondern die Randbedingungen approximiert. Zugleich muss eine möglichst einfache Funktion gewählt werden, die die DGL in dem Gebiet exakt erfüllt (sog. Fundamentallösung). Die räumliche Diskretisierung approximiert lediglich den Rand des Berechnungsgebiets (Randelementnetz) und die Verteilung einer Größe auf den Randelementen. Zur Lösung des Randwertproblems muss demzufolge eine Integralgleichung auf dem Rand ausgewertet werden.

Durch die Reduzierung des Problems um eine Raumdimension ist der Rechenaufwand grundsätzlich geringer als bei Gebietsmethoden. Außerdem können Halbräume, d.h. unendlich ausgedehnte Räume mit Rand, relativ leicht abgebildet werden, was insbesondere für dynamische Aufgabenstellungen in der Geotechnik ein entscheidender Vorteil ist. Wesentliche Nachteile der BEM sind ihre Beschränkung auf lineare Probleme sowie das Auffinden einer geeigneten Funktion für die exakte Lösung der Differentialgleichung.

Diskrete Elemente Methode

Für Diskontinua wie z.B. granulares Material oder Fels mit Trennflächen bietet die Diskrete Elemente Methode (engl.: discrete element method, kurz: DEM) eine alternative Lösungsstrategie zu den oben beschriebenen Kontinuumsmethoden. Das Berechnungsgebiet wird hierbei durch blockartige Elementargebiete approximiert (Diskrete Elemente Gefüge). Die einzelnen diskreten Elemente interagieren über Kontaktbedingungen, und die rechnerische Analyse des Mehrkörpersystems liefert die Kontaktkräfte und Verschiebungen.

Die DEM zeichnet sich durch Anschaulichkeit und einfache Zusammenhänge und Gleichungen aus. Demgegenüber stehen ein großer Rechenaufwand durch die notwendige Iteration des Gleichgewichts sowie die starke Vereinfachung der Elemente und Kontaktbedingungen. Das Nachrechnen realer Problemstellungen mit spezifischen Bodeneigenschaften ist daher nur eingeschränkt möglich.

1.3 Besonderheiten der Geotechnik

- Hochgradig nichtlineares Materialverhalten
 - Inelastisch (elastisch nur bei sehr kleinen Verformungen)
 - Abhängig von Spannung, Lagerungsdichte, Belastungsgeschichte
 - Dilatanz (Volumenänderung bei Scherverformung)
 - Mehrphasensystem (Korngerüst – Wasser – Luft)
- Anfangszustand des Baugrunds muss berücksichtigt werden
 - Effektiver Spannungszustand
 - Lagerungsdichte

- Belastungsgeschichte (geologisch, anthropogen)
- Heterogene Bodenbeschaffenheit und -zustände
- Komplexe Bauzustände, Rand- und Kontaktbedingungen
- 2D-Modellierung realer Probleme oft unzureichend
- Berechnungsausschnitt (Halbraum)
- Lückenlose Erkundung nicht möglich (Probennahme)
- Anfangszustand schwer zu erfassen
 - Auswirkungen geologischer Prozesse
 - Auswirkungen von Bauabläufen / Herstellungsverfahren

1.4 Literaturempfehlungen

Anwendung numerischer Verfahren in der Geotechnik:

- P. A. von Wolffersdorff, H. F. Schweiger: Numerische Verfahren in der Geotechnik, Kap. 1.9 in K.-J. Witt (Hrsg.): *Grundbau-Taschenbuch – Teil 1*, 7. Auflage, Ernst & Sohn, Berlin, 2008
- Deutsche Gesellschaft für Geotechnik (DGGT): *Empfehlungen des Arbeitskreises Numerik in der Geotechnik – EANG*, Ernst & Sohn, Berlin, 2014

Einführung in die Finite Elemente Methode und FEM Standardwerke:

- M. Merkel, A. Öchsner: *Eindimensionale Finite Elemente – Ein Einstieg in die Methode*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010
- P. Steinke: *Finite-Elemente-Methode – Rechnergestützte Einführung*, 5. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015
- K. Knothe, H. Wessels: *Finite Elemente – Eine Einführung für Ingenieure*, 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999
- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor u.a.: *The Finite Element Method*, drei Bände, 7. Auflage, Butterworth-Heinemann, 2013
- K.-J. Bathe: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, 1996
- T. J. R. Hughes: *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1987

Nichtlineare FEM und Implementierung von Materialmodellen:

- T. Belytschko, W. K. Liu, D. Moran: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, 2000

- P. Wriggers: *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- J. C. Simo, T. J. R. Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag Berlin, 1998

FEM speziell für geotechnische Anwendungen:

- D. M. Potts, L. Zdravković: *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering – Theory*, Thomas Telford, London, 1999
- D. M. Potts, L. Zdravković: *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering – Application*, Thomas Telford, London, 2001
- O. C. Zienkiewicz, A. H. C. Chan u.a.: *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999
- R. W. Lewis, B. A. Schrefler: *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, 2. Auflage, John Wiley & Sons, Chichester, 1998

Einführung in die Materialmodelle für Böden:

- D. Kolymbas, I. Herle: Stoffgesetze für Böden, Kap. 1.5 in K.-J. Witt (Hrsg.): *Grundbau-Taschenbuch – Teil 1*, 7. Auflage, Ernst & Sohn, Berlin, 2008
- D. M. Potts, L. Zdravković: *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering – Theory*, Thomas Telford, London, 1999
- O. C. Zienkiewicz, A. H. C. Chan u.a.: *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999

1.5 Schreibweisen und Konventionen

Zur Unterscheidung mathematischer Größen wird folgende Schreibweise vereinbart:

- a, α, \dots , d.h. Kleinbuchstaben kursiv mager, für Skalare und Koordinatenindizes
- O, P, \dots , d.h. Großbuchstaben kursiv mager, für Punkte und spezielle Operatoren
- $\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}, \dots$, d.h. Kleinbuchstaben kursiv fett, für Vektoren und Ortsvektoren
- $\mathbf{A}, \boldsymbol{\Phi}, \dots$, d.h. Großbuchstaben kursiv fett, für Tensoren zweiter und höherer Stufe, lineare Abbildungen und Matrizen
- $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \dots$, d.h. Großbuchstaben kalligrafisch, für Mengen und Vektorräume
- $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \dots$, d.h. Großbuchstaben mit Doppelstrich, für Zahlenmengen

Dies ist eine allgemeine Regel, die nicht immer konsequent angewendet werden kann. Zum Beispiel wird der Spannungstensor mit $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet, obwohl es sich dabei um einen Tensor zweiter Stufe handelt. Meistens ergibt sich aus dem Kontext, welche

Stufe der betrachtete Tensor hat. Zur Realisierung an der Tafel ersetzen wir außerdem Fettdruck durch einen Unterstrich, d.h. \underline{A} anstelle von \mathbf{A} .

Bei Vektoren und Tensoren unterscheidet man zwischen verschiedenen Schreibweisen bzw. Darstellungen. Für Vektoren eines m -dimensionalen Vektorraums (entsprechendes gilt für Tensoren 2. und höherer Stufe) verwenden wir speziell die

- symbolische, direkte oder absolute Schreibweise: \mathbf{v} ,
- indizistische oder Komponentenschreibweise: v_i ,
- lokale oder hybride Schreibweise: $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_m \mathbf{e}_m$,
- Matrixschreibweise: $\mathbf{v}^T = (v_1, \dots, v_m)$.

Außer der symbolischen Schreibweise beziehen sich alle Schreibweisen auf eine gegebene Basis $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{e}_i\}$ des zugrunde gelegten Vektorraums, die Matrixschreibweise insbesondere auf die orthonormierte Standardbasis.

Im vorliegenden Skript gilt die *Einsteinsche Summenkonvention*. Gemäß dieser Konvention wird innerhalb eines Terms über alle Werte doppelt auftretender Indizes summiert, wobei man das Summenzeichen zur Verbesserung der Lesbarkeit weglässt. Für die lokale Schreibweise eines Vektors gilt dann

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v_i \mathbf{e}_i \stackrel{\text{def}}{=} v_i \mathbf{e}_i . \quad (1.5.1)$$

Falls nicht summiert werden soll, so wird darauf explizit hingewiesen.

Schließlich sei darauf hingewiesen, dass wir konsequent die Vorzeichenkonvention der allgemeinen Mechanik anwenden, d.h. Kompression (Volumenverringern) und kompressive Spannungen werden mit einem negativen Vorzeichen versehen. Dies steht im Gegensatz zu der in der Bodenmechanik üblichen Vorzeichenkonvention. Unabhängig davon besitzt Druck ein positives Vorzeichen immer wenn die zugeordnete Spannung kompressiv ist, anderenfalls ein negatives Vorzeichen.

Literaturverzeichnis

DIN 1054. Baugrund – Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau. Beuth Verlag, Berlin, Dezember 2010. (zusammen mit Änderungen A1 und A2).

DIN EN 1997-1. Eurocode 7: Entwurf, Berechnung und Bemessung in der Geotechnik — Teil 1: Allgemeine Regeln. Beuth Verlag, Berlin, März 2014.

Kapitel 2

Exkurs Kontinuumsmechanik

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Bei bodenmechanischen oder geotechnischen Problemstellungen muss man oft die räumliche Verteilung der effektiven Spannung oder der Lagerungsdichte bzw. Porenzahl kennen. Als Beispiel sei die indirekte Setzungsberechnung genannt, bei der man den Wert der Vertikalspannung (genauer: der vertikalen Spannungskomponente) in einer bestimmten Tiefe benötigt, um den passenden Steifemodul des Bodens aus einem Lastsetzungsdiagramm abgreifen zu können. Die Gesamtheit einer Größe an allen Punkten des betrachteten Gebiets bezeichnet man in der Mathematik als *Feld*, und die Größe selbst heißt dann *Feldgröße*.

Der *umgebende Raum* und die *materiellen Körper* (Bodenschicht, Betonfundament etc.), die sich in diesem befinden, werden als Kontinua aufgefasst. Ein *Kontinuum* ist dabei eine Menge von Punkten bzw. Partikeln, die sich in jeder ihrer m Dimensionen bijektiv auf die Menge der reellen Zahlen, \mathbb{R} , abbilden lässt. Für jedes Paar von Punkten können also immer Umgebungen dieser Punkte angegeben werden, die sich nicht überschneiden, d.h. zwei Punkte eines Kontinuums sind niemals direkte Nachbarn. Dies unterscheidet Kontinua von diskreten Mengen bzw. Diskontinua. Außerdem kann jeder Punkt durch m reelle Zahlen, die *Koordinaten* des Punktes, eindeutig beschrieben werden.

Die Betrachtung von Boden als Kontinuum mag auf den ersten Blick nicht einleuchten, besteht er doch aus einzelnen Körnern, Wasser und Luft (sog. *Dreiphasensystem*). Üblicherweise ist man jedoch nicht an der mikroskopischen Verteilung einer Größe oder der Bewegung eines Einzelkorns interessiert, sondern an gewissen Mittelwerten. Es genügt in diesem Fall, die drei Phasen als überlappende Makro-Kontinua zu betrachten und lediglich ihren jeweiligen Volumenanteil zusätzlich zu berücksichtigen. Nichts anderes wird in der traditionellen Bodenmechanik gemacht. Beispielsweise ist die Massendichte eines wassergesättigten Bodens gegeben durch

$$\rho_r = (1 - n)\rho_s + n\rho_w , \quad (2.1.1)$$

wobei ρ_s die (gemittelte) Korndichte und ρ_w die Dichte des Wassers ist. Der Porenanteil n entspricht bei voller Sättigung dem Volumenanteil des Wassers, und $1 - n$ ist entsprechend der Feststoffanteil. Die Dichte des wassergesättigten Bodens, ρ_r , ist daher eine über ein repräsentatives Elementarvolumen gemittelte, makroskopische Größe. Die Kontinuumsbetrachtung ist auch eine Voraussetzung dafür, dass man mit Spannungs- und Dehnungsfeldern operieren kann anstelle von Einzelkräften und Verschiebungen von Körnern eines Korngefüges.

Unter den getroffenen Annahmen ist die Bodenmechanik ein Teilgebiet der Kontinuumsmechanik. Die Kontinuumsmechanik beschäftigt sich mit der Bewegung und Verformung von deformierbaren Körpern als Reaktion auf äußere Belastungen. Sie ist eine Feldtheorie und erfordert als solche zunächst Klarheit über ein paar grundlegende mathematische Begriffe und Beziehungen, die wir im Abschnitt 2.2 weitestgehend ohne Beweise zusammentragen. Einiges dürfte aus den Grundveranstaltungen zur Höheren Mathematik und Mechanik bereits bekannt sein.

Wir verweisen für das Selbststudium auf die Literatur, z.B.

- L. Papula: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1*, 14. Auflage, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014
- L. Papula: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*, 14. Auflage, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015
- B. Huppert, W. Willems: *Lineare Algebra*, B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006
- D. Lau: *Algebra und Diskrete Mathematik 1*, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007

zu den Themen der Linearen Algebra (Vektoren, Matrizen usw.) sowie

- H. Schade, K. Neemann: *Tensoranalysis*, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, 2006
- D. Klingbeil: *Tensorrechnung für Ingenieure*, Bibliographische Institut, Mannheim, 1966
- M. Itskov: *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers – With Applications to Continuum Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- Kapitel und/oder Anhänge in der Literatur über Kontinuumsmechanik

im Hinblick auf die Tensoralgebra und Tensoranalysis.

Lehrbücher über Kontinuumsmechanik und Materialtheorie sind ebenfalls zahlreich vorhanden. Empfohlen seien hier beispielsweise

- H. Altenbach: *Kontinuumsmechanik – Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*, 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015

- W. H. Müller: *Streifzüge durch die Kontinuumstheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011
- G. A. Holzapfel: *Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineers*, John Wiley & Sons, Chichester, 2000
- W. F. Chen, D. J. Han: *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag New York, 1988
- C. Truesdell, R. A. Toupin: *The Classical Field Theories*, Band III//1 in *Encyclopedia of Physics*, S. 226–793, Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg, 1960

2.2 Mathematische Grundlagen

2.2.1 Vektorräume und lineare Abbildungen

Operationen mit Vektoren

Eine Menge $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \dots\}$, auf die die Operationen der Addition $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ und der Multiplikation mit einer reellen Zahl $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ anwendbar sind, heißt ein (*reeller*) *Vektorraum*, und die Elemente von \mathcal{V} heißen *Vektoren*. Für die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl gelten außerdem die folgenden Gesetze:

$$\text{Kommutativgesetz: } \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad \lambda \mathbf{u} = \mathbf{u} \lambda, \quad (2.2.1)$$

$$\text{Assoziativgesetz: } (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad \lambda(\mu \mathbf{u}) = (\lambda \mu) \mathbf{u}, \quad (2.2.2)$$

$$\text{Distributivgesetz: } \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \quad (\lambda + \mu) \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}, \quad (2.2.3)$$

$$\text{neutrale Elemente: } \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u} \text{ (Nullvektor)}, \quad 1 \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad (2.2.4)$$

$$\text{inverses Element: } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad (2.2.5)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$. In diesem Zusammenhang nennt man λ, μ auch *skalare Größen* bzw. *Skalare*. Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$0 \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad (-1) \mathbf{u} = -\mathbf{u}, \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \quad (2.2.6)$$

Existiert ein *inneres Produkt* oder *Skalarprodukt*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}, \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (2.2.7)$$

so ist \mathcal{V} ein *Euklidischer Vektorraum*. Die *Euklidische Norm* eines Vektors ist dann definiert durch $\|\mathbf{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. In einem Euklidischen Vektorraum entspricht die *Abstandsfunktion*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (2.2.8)$$

der sogenannten *Metrik* des Raumes.

Basis eines Vektorraums

Sei m die *Dimension* des Vektorraums \mathcal{V} , dann heißt die Menge $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m\}$ von linear unabhängigen Vektoren \mathbf{g}_a , $a \in \{1, \dots, m\}$, eine *Basis von \mathcal{V}* . Zukünftig schreiben wir für die Basis kurz $\{\mathbf{g}_a\} \in \mathcal{V}$. Sofern die Basis gegeben ist kann jeder Vektor unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention (1.5.1) dargestellt werden als

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{g}_1 + v_2 \mathbf{g}_2 + \dots + v_m \mathbf{g}_m = v_a \mathbf{g}_a, \quad (2.2.9)$$

mit den *Komponenten* $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{g}_a\}$. Für den Nullvektor $\mathbf{v} = \mathbf{o} \in \mathcal{V}$ gilt $v_a = 0$ für alle $a \in \{1, \dots, m\}$.

Man beachte, dass die Basisvektoren in (2.2.9) im Allgemeinen weder normiert noch orthogonal zueinander sind. In m -dimensionalen Euklidischen Vektorräumen existieren jedoch *ortho-normierte Basen* $\{\mathbf{e}_i\}$ derart, dass

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad (2.2.10)$$

worin

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (2.2.11)$$

das *Kronecker-Delta* ist. Das Kronecker-Delta repräsentiert die sog. *Koeffizienten der Metrik* eines Euklidischen Vektorraums bezüglich einer ortho-normierten Basis. Für eine beliebige Basis $\{\mathbf{g}_a\}$ eines m -dimensionalen Euklidischen Vektorraums gilt hingegen

$$\mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}_b \stackrel{\text{def}}{=} g_{ab} \neq \delta_{ab}, \quad \text{mit } a, b \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.2.12)$$

Bezüglich einer ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ lässt sich das Skalarprodukt (2.2.7) für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ausdrücken durch

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i) \cdot (v_j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) u_i v_j = \delta_{ij} u_i v_j = u_i v_i, \quad (2.2.13)$$

mit $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Insbesondere erhält man die Komponenten eines Vektors durch

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_i \cdot (v_j \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) v_j = \delta_{ij} v_j = v_i. \quad (2.2.14)$$

Aus (2.2.13) und (2.2.14) geht eine wichtige Eigenschaft des Kronecker-Delta hervor, die später noch benötigt wird: es benennt Indizes um.

Standardvektorraum

Nach dieser allgemeinen Einführung betrachten wir das Beispiel eines Euklidischen Vektorraums, auf den wir uns im Rahmen dieser Lehrveranstaltung meistens beschränken, nämlich den *Standardvektorraum* bzw. *Raum der m -Tupel*¹, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m$. Üblicherweise ist

¹Ein m -Tupel ist eine geordnete Liste mit m Einträgen.

$m = 2$ oder $m = 3$. Mit Hilfe von $(m \times 1)$ -Matrizen, d.h. Spaltenmatrizen, wird der Standardvektorraum oft dargestellt als die Menge

$$\mathbb{R}^m \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \mid u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.2.15)$$

Eine ortho-normierte Basis für \mathbb{R}^m definiert durch (2.2.15) heißt eine *Standardbasis* oder *kanonische Basis* und ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_m \in \mathbb{R}^m. \quad (2.2.16)$$

Analog zu (2.2.9) ist $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ eine Darstellung des m -Tupels bezüglich der Standardbasis.

Die *Transponierte* $\mathbf{u}^T = (u_1, \dots, u_m)$ einer Spaltenmatrix ist eine Zeilenmatrix. Mit der bekannten „Zeile mal Spalte“-Regel für die Multiplikation von Matrizen sowie (2.2.13) erhält man das *Standard-Skalarprodukt*

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i, \quad \text{mit } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.2.17)$$

Lineare Abbildungen und Matrizen

Genauso wie zwischen Vektoren und ihren Komponenten unterscheiden wir konsequent zwischen einer linearen Abbildung und einer Matrix. Eine *lineare Abbildung* oder *lineare Transformation* $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ bildet einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ auf einen Vektor $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \mathcal{W}$ ab und besitzt die Eigenschaften

$$\text{Homogenität:} \quad \mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (2.2.18)$$

$$\text{Additivität:} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.2.19)$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir schreiben für die Gesamtheit dieser Abbildungen $L(\mathcal{V}; \mathcal{W})$.

Die *identische Abbildung* \mathbf{I} in \mathcal{V} ist definiert durch $\mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, und $\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ falls $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ eine Inverse besitzt; letztere Beziehung existiert also nur für lineare Abbildungen eines Vektorraums auf sich selbst (sog. Endomorphismen).

Aufgrund von (2.2.9) besitzt jede lineare Abbildung eine lokale Darstellung. Falls beispielsweise $\{\mathbf{g}_a\} \in \mathcal{V} = \mathbb{R}^m$ und $\{\mathbf{h}_\nu\} \in \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$ Basen sind, so kann $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{W})$ bezüglich dieser Basen dargestellt werden durch

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{g}_a = A_{\nu a} \mathbf{h}_\nu, \quad (2.2.20)$$

mit $a \in \{1, \dots, m\}$ und $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Man nennt die Zahlen $A_{\nu a} \in \mathbb{R}$ die *Komponenten der linearen Abbildung* \mathbf{A} bezüglich der Basen $\{\mathbf{h}_\nu\}$ und $\{\mathbf{g}_a\}$. Diese $n \times m$ Zahlen

können in einer Matrix angeordnet werden. Man erhält so die *Darstellungsmatrix der linearen Abbildung \mathbf{A} bezüglich der Basen $\{\mathbf{g}_a\}$ und $\{\mathbf{h}_\nu\}$* :

$$(A_{\nu a}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}. \quad (2.2.21)$$

Wie üblich bezeichnet der erste Index den *Zeilenindex* und der zweite Index den *Spaltenindex*. Die *Transponierte* einer Matrix erhält man durch Vertauschen der Indizes, also $(A_{\nu a})^T \stackrel{\text{def}}{=} (A_{a\nu})$. Es sei angemerkt, dass gemäß (2.2.9) die Basisvektoren \mathbf{h}_ν ihrerseits eine Darstellung bezüglich $\{\mathbf{g}_a\}$ besitzen und entsprechend die Komponenten von $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{W})$.

Sofern die Basen feststehen, kann eine lineare Abbildung $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{W})$ mit ihrer Matrix bezüglich dieser Basen identifiziert werden. Mathematisch gesprochen ist die Abbildung $\mathbf{A} \rightarrow (A_{\nu a})$ ein Isomorphismus, und die Matrix eine lineare Abbildung $(A_{\nu a}) \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ zwischen Standardvektorräumen.

Für eine ortho-normierte Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ und eine lineare Abbildung $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ liefert (2.2.20) aufgrund von (2.2.10) den wichtigen Zusammenhang

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (2.2.22)$$

Man beachte die Analogie zu (2.2.14). Wir werden diesen Zusammenhang später für die Definition eines Tensor verwenden.

Basistransformation und Invarianz

Wir betrachten nun zwei Basen $\{\mathbf{g}_a\}, \{\mathbf{g}_{a'}\}$ desselben Vektorraums \mathcal{V} , die nicht notwendigerweise orthogonal oder normiert sind, zusammen mit der identischen Abbildung $\mathbf{I} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{V})$. Die $m \times m$ Zahlen $B_{aa'} \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{g}_{a'} = \mathbf{g}_{a'} = B_{aa'} \mathbf{g}_a \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{g}_{a'} = B_{ba'} \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}_b = B_{ba'} \delta_{ab} = B_{aa'} \quad (2.2.23)$$

heißen die *Komponenten des Basiswechsels* $\{\mathbf{g}_a\} \mapsto \{\mathbf{g}_{a'}\}$; die Schreibweise $\mathbf{g}_{a'}$ anstelle von \mathbf{g}'_a ist allgemein üblich. Für den inversen Basiswechsel $\{\mathbf{g}_{a'}\} \mapsto \{\mathbf{g}_a\}$ definieren wir $(B_{aa'})^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (C_{a'a})$ und erhalten analog

$$\mathbf{g}_a = C_{a'a} \mathbf{g}_{a'} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_{a'} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{g}_a = C_{a'a}. \quad (2.2.24)$$

Wendet man die identische Abbildung auf einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ an, welcher jeweils die lokalen Darstellungen $\mathbf{v} = v_a \mathbf{g}_a$ und $\mathbf{v} = v_{a'} \mathbf{g}_{a'}$ bezüglich zweier Basen $\{\mathbf{g}_a\}, \{\mathbf{g}_{a'}\} \in \mathcal{V}$ besitzt, dann folgt mit (2.2.23)

$$\mathbf{v} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = v_{a'} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g}_{a'} = v_{a'} B_{aa'} \mathbf{g}_a = v_a \mathbf{g}_a. \quad (2.2.25)$$

Wir erhalten die fundamentale Aussage, dass sich unter einem Basiswechsel die Komponenten des Vektors mit der Inversen des Basiswechsels transformieren, sonst wäre der Vektor selbst nicht invariant:

$$v_a = B_{aa'} v_{a'} \quad \text{bzw.} \quad v_{a'} = C_{a'a} v_a, \quad \text{mit } (C_{a'a}) = (B_{aa'})^{-1}. \quad (2.2.26)$$

Falls zwei Basen $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}_{i'}\} \in \mathcal{V}$ ortho-normiert sind, dann ist die *Matrix des Basiswechsels* $(B_{ii'}) \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ aufgrund der Eigenschaft (2.2.10) orthogonal, d.h. es gelten

$$(B_{ii'})^{-1} = (B_{ii'})^T = (B_{i'i}) \quad \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m) \quad (2.2.27)$$

sowie

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_j = B_{ii'} B_{i'j} = \delta_{ij} , \quad (2.2.28)$$

worin die Komponenten $B_{ii'}$ und $B_{i'i}$ jeweils gegeben sind durch $\mathbf{e}_{i'} = B_{ii'} \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_i = B_{i'i} \mathbf{e}_{i'}$. Für einen Vektor $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v_{i'} \mathbf{e}_{i'} \in \mathcal{V}$ folgt aus (2.2.26) und (2.2.27) die Identität

$$v_{i'} = B_{i'i} v_i \quad \text{und} \quad v_i = B_{ii'} v_{i'} . \quad (2.2.29)$$

2.2.2 Affine Punkträume und Koordinaten

Axiome des affinen Punktraums

In den zuvor behandelten Vektorräumen existieren keine Punkte. Für den Begriff des physikalischen Feldes (Spannung, Dichte, usw.) muss jedoch ein Bezug zwischen der Größe und dem Bezugspunkt, an dem diese z.B. gemessen wird, hergestellt werden. Zu diesem Zweck wird der Begriff des *affinen Punktraums* eingeführt.

Ein *affiner Punktraum* $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, oder je nach Kontext einfach nur \mathcal{S} , besteht aus einer Menge von Punkten $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{A, B, C, \dots\}$, einem Vektorraum \mathcal{V} , beispielsweise $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m$, und einer Abbildung $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$, die jedem Paar von Punkten (A, B) einen Vektor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$ zuordnet. Darüber hinaus müssen die folgenden Axiome eingehalten werden:

1. Für jeden Punkt $A \in \mathcal{S}$ und jeden Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gibt es einen eindeutigen Punkt $A + \mathbf{v} = B \in \mathcal{S}$, so dass $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$.
2. Falls $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, so gilt auch $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Die zweite Bedingung ist als *Parallelogrammaxiom* bekannt. Dieses Axiom ist äquivalent zur Aussage $\mathbf{v}(A) = \mathbf{v}(C)$ bzw. $(A, \mathbf{v}) = (C, \mathbf{v}) \in (\mathcal{S}, \mathcal{V})$.

Ein affiner Punktraum $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ heißt *Euklidischer Punktraum*, falls der Vektorraum \mathcal{V} Euklidisch ist. Zum Beispiel ist der Raum der Anschauung ein Euklidischer Punktraum. In Euklidischen Punkträumen ist der Abstand der Punkte $P, Q \in \mathcal{S}$ definiert durch die Metrik $d(P, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$, mit $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$.

Bezugssysteme und affine Koordinaten

Ein *Bezugssystem* oder *Bezugsrahmen* $(O, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m) \stackrel{\text{def}}{=} (O, \mathbf{g}_a)$ in einem m -dimensionalen affinen Punktraum $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ ist eine Vektorbasis $\{\mathbf{g}_a\} \in \mathcal{V}$ an einem beliebigen Punkt $O \in \mathcal{S}$, dem *Bezugspunkt* oder *Ursprung des Bezugssystems*. Der *Ortsvektor* eines weiteren Punktes $P \in \mathcal{S}$ bezüglich des Ursprungs O ist das Paar

$$(O, \overrightarrow{OP}) \stackrel{\text{def}}{=} (O, \mathbf{x}) \quad \in \mathcal{S} \times \mathcal{V} . \quad (2.2.30)$$

Der Einfachheit halber schreiben wir \mathbf{x} bzw. $\mathbf{x}(P)$ für den Ortsvektor von P , sofern Klarheit über den Ursprung herrscht. Der Ortsvektor ist wegen (2.2.30) kein gewöhnlicher Vektor, außer wenn er von einem anderen Bezugssystem $(O', \mathbf{g}_{a'})$ aus betrachtet wird. Daher spielen Bezugssysteme in affinen Punkträumen eine wichtige Rolle.

Die lokale Darstellung des Ortsvektors, $\mathbf{x}(P) = z_a(P) \mathbf{g}_a$, liefert die *affinen Koordinaten* $\{z_1(P), \dots, z_m(P)\}$ des Punktes P im Bezugssystem (O, \mathbf{g}_a) . Die Gesamtheit der affinen Koordinaten aller Punkte heißt ein *affines Koordinatensystem*.

In Euklidischen Punkträumen $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ kann mit Hilfe einer ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ ein spezielles Bezugssystem (O, \mathbf{e}_i) konstruiert werden. Die lokale Darstellung $\mathbf{x}(P) = x_i(P) \mathbf{e}_i$ des Ortsvektors von $P \in \mathcal{S}$ in diesem Bezugssystem enthält dessen *kartesische Koordinaten* $\{x_1(P), \dots, x_m(P)\}$, und ihre Gesamtheit heißt ein *kartesisches Koordinatensystem*.

Der sog. *Standardraum* $(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, oder kurz \mathbb{R}^m , ist ein Euklidischer Punkt- raum mit kanonischer Basis gemäß (2.2.16), in dem jeder Punkt P mit der Spaltenmatrix seiner kartesischen Koordinaten bezüglich (O, \mathbf{e}_i) identifiziert wird:

$$\mathbf{x}(P) = \begin{pmatrix} x_1(P) \\ \vdots \\ x_m(P) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (2.2.31)$$

Transformationen

Gegeben seien affine Koordinatensysteme im Zusammenhang mit zwei Bezugssystemen (O, \mathbf{g}_a) und $(O', \mathbf{g}_{a'})$. Dann transformieren sich unter einem *Wechsel der Bezugssysteme* $(O, \mathbf{g}_a) \mapsto (O', \mathbf{g}_{a'})$ die affinen Koordinaten linear mit

$$z_{a'} = C_{a'a} z_a + c_{a'} . \quad (2.2.32)$$

Hierin sind $C_{a'a}$ die Komponenten des inversen Basiswechsels $\{\mathbf{g}_{a'}\} \mapsto \{\mathbf{g}_a\}$ gemäß (2.2.24), und $c_{a'}$ sind die Komponenten der Translation $\overrightarrow{O'O}$. Anders ausgedrückt sind die Funktionen $\zeta_{a'}$ gegeben durch $z_{a'} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_{a'}(z_1, \dots, z_m)$ linear in den z_a . Ihre partiellen Ableitungen nach den affinen Koordinaten sind die (konstanten) Komponenten des inversen Basiswechsels:

$$\frac{\partial \zeta_{a'}(z_1, \dots, z_m)}{\partial z_a} = \frac{\partial z_{a'}}{\partial z_a} = C_{a'a} . \quad (2.2.33)$$

Für kartesische Koordinatensysteme gilt speziell

$$x_{i'} = B_{i'i} x_i + c_{i'} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_i} x_i + c_{i'} . \quad (2.2.34)$$

Die Transformationsvorschriften (2.2.32) bzw. (2.2.34) liefern die affinen bzw. kartesischen Koordinaten unter einem Wechsel der Bezugssysteme, was auch als *passive*

Transformation bezeichnet wird. Im Gegensatz dazu verändert eine affine Transformation den affinen Punktraum selbst, beziehungsweise eine Teilmenge davon (*aktive Transformation*).

Es seien also $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ und $(\mathcal{T}, \mathcal{W})$ affine Punkträume, $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{W})$ eine lineare Abbildung und $O, P \in \mathcal{S}$. Unter einer *affinen Transformation* $\theta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ wird der Punkt $P = O + \overrightarrow{OP}$ abgebildet auf

$$\theta(P) = \theta(O) + \mathbf{A} \cdot (\overrightarrow{OP}) \in \mathcal{T}. \quad (2.2.35)$$

Um eine Komponentendarstellung bezüglich ortho-normierter Systeme zu erhalten, definieren wir $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP} = x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{x}' \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\theta(P)} = x_{i'} \mathbf{e}_{i'}$ und $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\theta(O)} = c_{i'} \mathbf{e}_{i'}$. Dann ist wegen (2.2.35) zunächst

$$\overrightarrow{\theta(P)} = \mathbf{A} \cdot (\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{\theta(O)} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \quad (2.2.36)$$

eine symbolische Vektordarstellung der affinen Transformation. Falls nun eine transformierte ortho-normierte Basis $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ gegeben ist durch $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A_{i'i} \mathbf{e}_{i'}$, so ist

$$x_{i'} = A_{i'i} x_i + c_{i'} \quad (2.2.37)$$

eine Komponentendarstellung der affinen Transformation.

2.2.3 Tensoralgebra

Jedem Bauingenieur sind die Begriffe *Spannungstensor* und *Dehnungstensor* geläufig, doch nur wenige können erklären, was ein Tensor überhaupt ist. In der Literatur findet man insbesondere zwei Definitionen, die am Ende aber zum selben Ergebnis führen. Die erste Definition betrachtet den Tensor als eine multilineare Abbildung und die zweite Definition führt ihn als eine mathematische Größe ein, die sich unter einem Basiswechsel nicht ändert.

Letztere Eigenschaft eines Tensors, die *Invarianz*, ist in der Mechanik und in anderen Bereichen der Physik von fundamentaler Bedeutung. Ein einfaches Beispiel ist der Vektor der Gewichtskraft eines Bauteils. Dieser hat stets denselben Betrag und ist immer auf den Mittelpunkt der Erde gerichtet, ganz egal welches Bezugssystem man wählt, um seinen Betrag und seine Richtung zahlenmäßig anzugeben.

Im Folgenden beziehen wir uns ausschließlich auf ortho-normierte Basen $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}_{i'}\}$ eines Euklidischen Vektorraums \mathcal{V} . Gemäß Abschn. 2.2.1 ist die Matrix $(B_{ii'})$ des Basiswechsels $\{\mathbf{e}_i\} \mapsto \{\mathbf{e}_{i'}\}$ orthogonal, so dass die Matrix des inversen Basiswechsels gegeben ist durch $(B_{ii'})^{-1} = (B_{ii'})^T = (B_{i'i})$.

Definition eines Tensors: Transformationsverhalten

Wir stellen zunächst fest, dass Skalare $\alpha \in \mathbb{R}$, wie z.B. die Euklidische Norm eines Vektors oder der Abstand zweier Punkte, definitionsgemäß invariant gegenüber Basiswechsel sind. Es gilt also die Transformationsvorschrift

$$\alpha' = \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.2.38)$$

Man nennt eine mathematische Größe, die sich unter einem Basiswechsel $\{\mathbf{e}_i\} \mapsto \{\mathbf{e}_{i'}\}$ gemäß der Vorschrift (2.2.38) transformiert, einen *Tensor nullter Stufe*.

Im Abschn. 2.2.1 hatten wir die Invarianz von Vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gegenüber beliebiger Basistransformationen nachgewiesen:

$$v_{i'} = B_{i'i} v_i \quad \text{bzw.} \quad v_i = B_{ii'} v_{i'} \quad \in \mathbb{R} . \quad (2.2.39)$$

Für die Basisvektoren gilt entsprechend

$$\mathbf{e}_{i'} = B_{ii'} \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_i = B_{i'i} \mathbf{e}_{i'} . \quad (2.2.40)$$

Man nennt eine mathematische Größe, deren Komponenten sich unter einem Basiswechsel $\{\mathbf{e}_i\} \mapsto \{\mathbf{e}_{i'}\}$ gemäß der Vorschrift (2.2.39)₁ transformieren, einen *Tensor erster Stufe*. Vektoren sind demnach zugleich Tensoren erster Stufe, jedoch nicht die Vektorkomponenten oder deren Anordnung in einer Spaltenmatrix.

Wir betrachten nun eine lineare Abbildung $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Ihre Komponenten bezüglich der ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ sind gegeben durch (2.2.22):

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \quad \in \mathbb{R} . \quad (2.2.41)$$

Bezüglich einer anderen ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_{i'}\} \in \mathcal{V}$ verlangen wir analog

$$A_{i'j'} = \mathbf{e}_{i'} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{j'} . \quad (2.2.42)$$

Einsetzen von (2.2.40)₁ liefert dann

$$A_{i'j'} = (B_{ii'} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{A} \cdot (B_{jj'} \mathbf{e}_j) = B_{ii'} B_{jj'} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) , \quad (2.2.43)$$

und mit (2.2.41) erhält man schließlich

$$A_{i'j'} = B_{ii'} B_{jj'} A_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad (A_{i'j'}) = (B_{i'i})^T (A_{ij}) (B_{jj'}) . \quad (2.2.44)$$

Man nennt eine mathematische Größe, deren Komponenten sich unter einem Basiswechsel gemäß der Vorschrift (2.2.44) transformieren, einen *Tensor zweiter Stufe*. Lineare Abbildungen sind demnach zugleich Tensoren zweiter Stufe, jedoch nicht die Komponenten der linearen Abbildung oder deren Anordnung in einer Matrix. Wichtige Beispiele von Tensoren zweiter Stufe in der Kontinuumsmechanik sind der Spannungstensor und der Dehnungstensor.

Die Transformationsvorschrift (2.2.44) lässt sich auf Tensoren beliebiger Stufe verallgemeinern. Man nennt eine mathematische Größe \mathbf{T} , deren Komponenten sich unter einem Basiswechsel gemäß der Vorschrift

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_k} = B_{i_1 i'_1} B_{i_2 i'_2} \dots B_{i_k i'_k} T_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad \in \mathbb{R} \quad (2.2.45)$$

transformieren, einen *Tensor q-ter Stufe*. Diese Vorschrift lässt sich leicht merken.

In der Kontinuumsmechanik begegnen einem üblicherweise Tensoren bis maximal vierter Stufe, und zwar in Form eines Materialmodells („Stoffgesetz“). Ein lineares Materialmodell wird durch die Steifigkeit repräsentiert, welche mathematisch gesprochen den Dehnungstensor linear auf den Spannungstensor abbildet. Ein Tensor vierter Stufe ist also eine Abbildung zwischen Tensoren zweiter Stufe bzw. linearen Abbildungen.

Definition eines Tensors: Multilineare Abbildung

Die Betrachtung eines Tensors als eine Abbildung erfordert keine Komponentendarstellung bezüglich einer Basis, d.h. sie kann rein symbolisch erfolgen. Dies mag Ingenieuren zu abstrakt mathematisch erscheinen, es vervollständigt jedoch unser Bild eines Tensors und trägt zum tieferen Verständnis bei.

Gemäß (2.2.38) ist ein Skalar eine invariante Größe. Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ liefert definitionsgemäß einen Skalar. Wir schreiben hierfür allgemeiner

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R} \quad (2.2.46)$$

und meinen damit den *Tensor \mathbf{u} angewendet auf \mathbf{v}* .

Die Multiplikation einer linearen Abbildung $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ mit zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ führt wegen (2.2.41) ebenfalls auf einen Skalar (Summenkonvention!):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = (v_i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{A} \cdot (w_j \mathbf{e}_j) = v_i w_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j) = v_i w_j A_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (2.2.47)$$

Wir schreiben hierfür

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R} \quad (2.2.48)$$

und meinen damit den *Tensor \mathbf{A} angewendet auf \mathbf{v} und \mathbf{w}* .

Allgemein definieren wir nun einen *Tensor q -ter Stufe \mathbf{T} im Vektorraum \mathcal{V}* als eine multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{q\text{-fach}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q) &\mapsto \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q). \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

Den Raum aller Tensoren q -ter Stufe in \mathcal{V} bezeichnen wir mit $T_q(\mathcal{V})$. Multilinearität der Abbildung bedeutet hierbei Linearität in allen Argumenten, also

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \lambda \mathbf{a}, \dots, \mathbf{v}_q) = \lambda \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{v}_q) \quad (2.2.50)$$

und

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{v}_q) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{v}_q) + \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{v}_q) \quad (2.2.51)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q \in \mathcal{V}$.

Die *Komponenten eines Tensors q -ter Stufe* werden konsistent zu (2.2.41) definiert durch

$$T_{i_1 \dots i_q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_q}) \in \mathbb{R}, \quad (2.2.52)$$

d.h. indem man dem Tensor die Basisvektoren als Argumente übergibt. Hieraus folgt auch unmittelbar die Transformationsvorschrift (2.2.45):

$$T_{i'_1 \dots i'_q} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_{i'_1}, \dots, \mathbf{e}_{i'_q}) = \mathbf{T}(B_{i_1 i'_1} \mathbf{e}_{i_1}, \dots, B_{i_q i'_q} \mathbf{e}_{i_q}) = B_{i_1 i'_1} \dots B_{i_q i'_q} T_{i_1 \dots i_q}. \quad (2.2.53)$$

Zusammenfassend können wir festhalten:

- Tensoren nullter Stufe sind Skalare,
- Tensoren erster Stufe sind Vektoren,
- Tensoren zweiter Stufe sind lineare Abbildungen,
- Tensoren q -ter Stufe sind multilineare Abbildung auf \mathbb{R} mit q Argumenten.

Tensorprodukt und lokale Darstellung

Es seien $\mathbf{T} \in T_p(\mathcal{V})$ ein Tensor p -ter Stufe und $\mathbf{S} \in T_q(\mathcal{V})$ ein Tensor q -ter Stufe im Vektorraum \mathcal{V} . Das *Tensorprodukt* von \mathbf{T} und \mathbf{S} ist dann der Tensor $(p + q)$ -ter Stufe definiert durch

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) \mathbf{S}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q), \quad (2.2.54)$$

mit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q \in \mathcal{V}$. Die p - und q -Tupel der Argumente der beteiligten Tensoren werden also einfach hintereinander geschrieben. Auf diese Weise kann man Tensoren beliebiger Stufe „konstruieren“. Beispielsweise erhält man aus zwei Tensoren erster Stufe (Vektoren) einen Tensor zweiter Stufe. Das Tensorprodukt ist übrigens auch dann definiert, wenn \mathbf{T} und \mathbf{S} unterschiedlichen Vektorräumen angehören.

Das Tensorprodukt zweier Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} wird auch ihr *dyadisches Produkt* genannt, und das Resultat ist die *Dyade* $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. Diese ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h.

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}. \quad (2.2.55)$$

Es gelten die folgenden Rechengesetze:

$$\text{Kommutativgesetz: } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad (2.2.56)$$

$$\lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\lambda, \quad (2.2.57)$$

$$\text{Assoziativgesetz: } (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) + \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{f}), \quad (2.2.58)$$

$$\lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\lambda = \mathbf{a} \otimes (\lambda\mathbf{b}), \quad (2.2.59)$$

$$\text{Distributivgesetz: } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \quad (2.2.60)$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \quad (2.2.61)$$

$$(\lambda + \mu)(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) + \mu(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \quad (2.2.62)$$

$$\text{neutrales Element: } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{o} \otimes \mathbf{o} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (\text{Nulldyade}), \quad (2.2.63)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathcal{V}$. Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$0(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{o} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{o} = \mathbf{o} \otimes \mathbf{o} \quad \text{für alle } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}. \quad (2.2.64)$$

Mit Hilfe des Tensorprodukts (2.2.54) kann man eine lokale Darstellung eines Tensors $\mathbf{T} \in T_q(\mathcal{V})$ bezüglich einer ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ konstruieren:

$$\mathbf{T} = T_{i_1 i_2 \dots i_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q} \in T_q(\mathcal{V}) = \underbrace{\mathcal{V} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}}_{q\text{-fach}}. \quad (2.2.65)$$

Hierbei ist $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q}$ eine Basis des q -Tensorraums $T_q(\mathcal{V})$, mit $q \in \mathbb{N}$ (nichtnegative ganze Zahl), und ein beliebiges \mathbf{e}_{i_k} heißt *Bein* des Tensors, mit $k \in \{1, \dots, q\}$. Die Reihenfolge der einzelnen Basisvektoren spielt aufgrund der Eigenschaften des Tensorprodukts eine wichtige Rolle. Ein Tensor q -ter Stufe im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^{m=3}$ besitzt daher im Allgemeinen 3^q verschiedene Komponenten. Speziell gilt für $q = 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= T_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{13} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + T_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + T_{31} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

mit unabhängig laufenden Indizes $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Einfache und doppelte Überschiebung

Das Skalarprodukt zwischen Vektoren, (2.2.7), kann auf Tensoren übertragen werden und heißt dort (*einfache*) *Überschiebung* oder (*einfache*) *Kontraktion*. Bei der einfachen Überschiebung wird das i -te Bein eines Tensors mit dem j -ten Bein eines anderen Tensors skalar multipliziert. Ist beispielsweise $\mathbf{T} \in T_4(\mathcal{V})$ ein Tensor vierter Stufe mit Komponenten T_{abcd} und $\mathbf{S} \in T_3(\mathcal{V})$ ein Tensor dritter Stufe mit Komponenten S_{ijk} , so ergibt die einfache Überschiebung auf dem letzten Index einen Tensor der Stufe $4 + 3 - 2 = 5$:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \in T_5(\mathcal{V}), \quad \text{in Komponenten } T_{abcd} S_{ijd} \in \mathbb{R}. \quad (2.2.67)$$

Die *doppelte Überschiebung* oder *doppelte Kontraktion* kondensiert die letzten zwei Beine (Indizes) von \mathbf{T} and \mathbf{S} :

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} \in T_3(\mathcal{V}), \quad \text{in Komponenten } T_{abcd} S_{icd} \in \mathbb{R}. \quad (2.2.68)$$

Die einfache Überschiebung eines Tensors zweiter Stufe $\mathbf{T} \in T_2(\mathcal{V})$ mit einem Tensor erster Stufe (Vektor) $\mathbf{v} \in T_1(\mathcal{V}) \equiv \mathcal{V}$ liefert analog zu einer linearen Abbildung einen Vektor. Mit der lokalen Darstellung (2.2.52) eines Tensors bezüglich der orthonormierten Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ kann die Überschiebung von rechts ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (v_k \mathbf{e}_k) = T_{ij} v_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) = T_{ij} v_k \delta_{jk} \mathbf{e}_i = T_{ij} v_j \mathbf{e}_i, \quad (2.2.69)$$

mit $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, d.h.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = v_i \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i \in \mathcal{V}, \quad \text{in Komponenten } T_{ij} v_j \in \mathbb{R}. \quad (2.2.70)$$

Bei der Überschiebung von links erhält man stattdessen

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = v_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \in \mathcal{V}, \quad \text{in Komponenten } v_i T_{ij} = T_{ij} v_i \in \mathbb{R}. \quad (2.2.71)$$

Die einfache Überschiebung bricht also Dyaden auf. In Analogie zu (2.2.18) und (2.2.19) gelten die Rechengesetze

$$\text{Homogenität: } \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot (\lambda \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (2.2.72)$$

$$\text{Additivität: } (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}), \quad (2.2.73)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{V}$.

Weitere Operationen und spezielle Tensoren

Mit Hilfe der lokalen Darstellung eines Tensors bezüglich der ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_i\} \in \mathcal{V}$ definieren wir den *Einheitstensor zweiter Stufe* oder *Metrikstensor* durch

$$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i . \quad (2.2.74)$$

Im Folgenden sei $\mathbf{T} \in T_2(\mathcal{V})$ ein beliebiger Tensor zweiter Stufe. Die *Spur* von \mathbf{T} erhält man durch die einfache Überschiebung beider Beine des Tensors bzw. durch die doppelte Überschiebung mit dem Einheitstensor zweiter Stufe:

$$\text{sp} \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} : \mathbf{I} = \mathbf{I} : \mathbf{T} \in \mathbb{R}, \quad \text{in Komponenten} \quad T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} \in \mathbb{R} . \quad (2.2.75)$$

Für den Einheitstensor zweiter Stufe in einem m -dimensionalen Vektorraum gilt speziell

$$\text{sp} \mathbf{I} = m . \quad (2.2.76)$$

Die *Norm* von \mathbf{T} ist gegeben durch

$$\|\mathbf{T}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} = \sqrt{\text{sp}(\mathbf{T}^2)} = \sqrt{T_{ij} T_{ij}} \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} . \quad (2.2.77)$$

Der Tensor $\mathbf{T}^T \in T_2(\mathcal{V})$ ist der *Transponierte* von \mathbf{T} und definiert durch

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} , \quad (2.2.78)$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Der Tensor heißt *symmetrisch*, falls $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$.

Als *Deviator* bezeichnet man Tensoren zweiter Stufe deren Spur verschwindet. Der deviatorische Anteil beliebiger $\mathbf{T} \in T_2(\mathcal{V})$ berechnet sich aus

$$\mathbf{T}_{\text{dev}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} - \frac{1}{m} (\text{sp} \mathbf{T}) \mathbf{I}, \quad \text{in Komponenten} \quad (\mathbf{T}_{\text{dev}})_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{m} T_{kk} \delta_{ij} , \quad (2.2.79)$$

mit $\text{sp} \mathbf{T}_{\text{dev}} = 0$. Umgekehrt lässt sich jeder Tensor zweiter Stufe additiv in seinen deviatorischen Anteil und seinen sog. *Kugelanteil* $\mathbf{T}_{\text{sph}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} (\text{sp} \mathbf{T}) \mathbf{I}$ aufspalten.

Ein Tensor vierter Stufe zusammen mit der Operation der doppelten Überschiebung kann als eine (multilineare) Abbildung zwischen Tensoren zweiter Stufe aufgefasst werden. Mit dieser und den zuvor gewonnenen Erkenntnissen definieren wir nun häufig verwendete *Einheitstensoren vierter Stufe* in \mathcal{V} :

$$\mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1} : \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T} , \quad (2.2.80)$$

$$\mathbf{1}_T \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{il} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1}_T : \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}^T , \quad (2.2.81)$$

$$\mathbf{1}_{\text{sym}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1}_{\text{sym}} : \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{sym}} , \quad (2.2.82)$$

$$\mathbf{1}_{\text{sph}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1}_{\text{sph}} : \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{sph}} , \quad (2.2.83)$$

$$\mathbf{1}_{\text{dev}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1} - \mathbf{1}_{\text{sph}} = (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{1}_{\text{dev}} : \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{dev}} , \quad (2.2.84)$$

für alle $\mathbf{T} \in T_2(\mathcal{V})$.

Beispielhaft weisen wir nach, dass $\mathbf{1}_{\text{sph}}$ tatsächlich den Kugelanteil von $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{rs} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s$ liefert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\text{sph}} : \mathbf{T} &= \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right) : (T_{rs} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) \\
&= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} T_{rs} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) : (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) \\
&= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} T_{rs} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_r) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_s) \\
&= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{kr} \delta_{ls} T_{rs} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\
&= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} T_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= \frac{1}{3} (\text{sp } \mathbf{T}) \mathbf{I} = \mathbf{T}_{\text{sph}} .
\end{aligned} \tag{2.2.85}$$

Eigenwerte und Invarianten

Die *Eigenwerte* $\lambda_k \in \mathbb{R}$ eines Tensor zweiter Stufe $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in T_2(\mathcal{V})$ in einem dreidimensionalen Vektorraum, mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, ergeben sich aus seinem *charakteristischen Polynom*

$$\det(\mathbf{T} - \lambda_k \mathbf{I}) = \lambda_k^3 - I_1(\mathbf{T}) \lambda_k^2 + I_2(\mathbf{T}) \lambda_k - I_3(\mathbf{T}) = 0 . \tag{2.2.86}$$

Hierin heißen die Koeffizienten $I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T})$ die *Hauptinvarianten* des Tensors, wobei gilt

$$I_1(\mathbf{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sp } \mathbf{T} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \tag{2.2.87}$$

$$I_2(\mathbf{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \det \mathbf{T} \text{sp}(\mathbf{T}^{-1}) = \frac{1}{2} ((\text{sp } \mathbf{T})^2 - \text{sp}(\mathbf{T}^2)) , \tag{2.2.88}$$

$$I_3(\mathbf{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \det \mathbf{T} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 . \tag{2.2.89}$$

2.2.4 Felder und Tensoranalysis

Definition eines Feldes

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir Skalare, Vektoren und Tensoren ohne Bezug zu einem umgebenden Raum behandelt. In der Bodenmechanik oder der Kontinuumsmechanik allgemein ist man jedoch an der räumlichen Verteilung einer physikalischen Größe (Skalar, Vektor oder Tensor) interessiert und wie sich diese von Ort zu Ort ändert. Mit diesen Fragen beschäftigt sich die Tensoranalysis, für die man den Begriff des Feldes einführen muss.

Gegeben sei affiner Punktraum $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, bestehend aus einer Punktmenge \mathcal{S} und einem m -dimensionalen Vektorraum \mathcal{V} . Ein *Tensorfeld q -ter Stufe \mathbf{T}* , oder kurz *Feld*, ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \times T_q(\mathcal{V}) \\
P &\mapsto \mathbf{T}(P) ,
\end{aligned} \tag{2.2.90}$$

die jedem Punkt $P \in \mathcal{S}$ einen Tensor q -ter Stufe zuordnet. Wir bezeichnen die Menge aller Tensorfelder q -ter Stufe auf \mathcal{S} mit $\mathcal{T}_q(\mathcal{S})$ und schreiben $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_q(\mathcal{S})$.

Die Definition gilt für Skalarfelder $\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ bzw. $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathbb{R}$ (Tensorfelder nullter Stufe) und Vektorfelder $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$ bzw. $\mathbf{v} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ (Tensorfelder erster Stufe) gleichermaßen. Häufig schreiben wir einfach $\mathbf{T}(P)$ und meinen damit entweder ein Tensorfeld oder speziell den Tensor $\mathbf{T} \in T_q(\mathcal{V})$ am Punkt $P \in \mathcal{S}$.

Ein *zeitabhängiges Feld* wird dadurch definiert, dass für jeden festen Zeitpunkt t innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls $[0, T] \subset \mathbb{R}$ ein bestimmtes zeitunabhängiges Feld vorliegt, also

$$\mathbf{T}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_t(P) \in \mathcal{T}_q(\mathcal{S}), \quad \text{für alle festen } t \in [0, T]. \quad (2.2.91)$$

Gradient und Divergenz

Sofern ein Feld eine gewisse Stetigkeit besitzt kann dieses differenziert werden, d.h. es kann die Ableitung des Feldes am Punkt $P \in \mathcal{S}$ berechnet werden. Im Folgenden sei $\mathbf{x}(P) = x_i(P) \mathbf{e}_i$ der Ortsvektor des Punktes in einem ortho-normierten Bezugssystem und x_i seine kartesischen Koordinaten, mit $i \in \{1, \dots, m\}$. Darüber hinaus sei der zugrunde gelegte Punktraum Euklidisch.

Ist nun $f \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, ein Skalarfeld auf dem Punktraum, also $f(P) \in \mathbb{R}$, dann ist der *Gradient von f* ein Vektorfeld $\nabla f \in \mathcal{V}(\mathcal{S})$ definiert durch

$$\nabla f(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P) \mathbf{e}_m = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \mathbf{e}_i \quad \text{für alle } P \in \mathcal{S}. \quad (2.2.92)$$

Der *Gradient eines Vektorfeldes* $\mathbf{v} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ ist ein Tensorfeld zweiter Stufe $\nabla \mathbf{v} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times T_2(\mathcal{V})$, mit

$$\nabla \mathbf{v}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(P) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \in \mathcal{T}_2(\mathcal{S}). \quad (2.2.93)$$

Allgemein liefert der *Gradient eines Tensorfeldes q -ter Stufe \mathbf{T}* ein Tensorfeld $\nabla \mathbf{T}$ der Stufe $q + 1$. An jedem $P \in \mathcal{S}$ sind seine Komponenten gegeben durch

$$(\nabla \mathbf{T})_{i_1 \dots i_{q+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_q}}{\partial x_{i_{q+1}}}. \quad (2.2.94)$$

Die *Divergenz eines Tensorfeldes* $\mathbf{T} \in T_q(\mathcal{V})$ erhält man durch einfache Überschiebung des Gradienten $\nabla \mathbf{T}$ auf dem letzten Bein des Tensors, d.h.

$$\text{div } \mathbf{T}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_q}}{\partial x_{i_q}}(P) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{q-1}} \in \mathcal{T}_{q-1}(\mathcal{S}). \quad (2.2.95)$$

In der Literatur wird gelegentlich $\mathbf{T} \cdot \nabla$ anstelle von $\text{div } \mathbf{T}$ geschrieben. Für Vektorfelder gilt speziell

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{sp}(\nabla \mathbf{v}) = \mathbf{I} : \nabla \mathbf{v}. \quad (2.2.96)$$

Für ein Skalarfeld α , ein Vektorfeld \mathbf{v} und ein beliebiges Tensorfeld \mathbf{T} gilt die *Produktregel*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\alpha \mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) &= \alpha \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} + \mathbf{T} \operatorname{div}(\alpha \mathbf{v}) \\ &= \alpha \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} + \mathbf{T}(\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha) + \alpha \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v} , \end{aligned} \quad (2.2.97)$$

mit

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} v_j \frac{\partial T_{i_1 \dots i_q}}{\partial x_j} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha \stackrel{\text{def}}{=} v_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} . \quad (2.2.98)$$

Materielle Zeitableitung

Die *materielle Zeitableitung* eines zeitabhängigen Tensorfeldes $\mathbf{T}_t \in \mathcal{T}_q(\mathcal{S})$ definieren wir durch

$$\dot{\mathbf{T}}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}(P, t) = \frac{\partial T_{i_1 \dots i_q}}{\partial t}(P, t) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q} . \quad (2.2.99)$$

Richtungsableitung und Ableitung nach einem Tensor

Im Zusammenhang mit Materialmodellen benötigt man häufig die Ableitung einer skalaren oder tensorwertigen Funktion nach einem Tensor. Auch bei der sog. Linearisierung nichtlinearer Gleichungen werden derartige Ableitungen benötigt. Man benötigt hierfür die Begriffe der Richtungsableitung bzw. der Fréchet-Ableitung.

Gegeben sei eine glatte, d.h. unendlich oft stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ einen Wert $g(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Die *Taylor-Entwicklung* liefert eine Darstellung dieser Funktion in der Umgebung eines Punktes x_0 :

$$g(x) = g(x_0) + Dg(x_0) \cdot (x - x_0) + R . \quad (2.2.100)$$

$Dg(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \partial g(x) / \partial x|_{x=x_0}$ ist die *Ableitung der Funktion nach x am Punkt x_0* , \cdot ist die normale Multiplikation und $R \stackrel{\text{def}}{=} R(u)$ ist ein Restglied mit der Eigenschaft

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{R(u)}{|u|} = 0 , \quad \text{mit} \quad u \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0 . \quad (2.2.101)$$

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von (2.2.100) sind linear in u und heißen die *Linearisierung der Funktion am Punkt x_0 in Richtung u* . Wir schreiben hierfür

$$\operatorname{LIN}_{x_0}(g; u) \stackrel{\text{def}}{=} g(x_0) + Dg(x_0) \cdot u . \quad (2.2.102)$$

Die für skalarwertige Funktionen angegebenen Definitionen lassen sich auf tensorwertige Funktionen erweitern. Es sei $\mathbf{G} : T_2(\mathcal{V}) \rightarrow T_2(\mathcal{W})$ eine stetig differenzierbare Funktion, die einem Tensor zweiter Stufe $\mathbf{T} \in T_2(\mathcal{V})$ den Tensor $\mathbf{G}(\mathbf{T}) \in T_2(\mathcal{W})$ zuordnet, wobei \mathcal{V} und \mathcal{W} beliebige Vektorräume sind². Die Verallgemeinerung von (2.2.100) lautet dann

$$\mathbf{G}(\mathbf{T}) = \mathbf{G}(\mathbf{T}_0) + D\mathbf{G}(\mathbf{T}_0) : \mathbf{U} + R , \quad (2.2.103)$$

²Im eigentlichen mathematischen Sinne handelt es sich bei der Funktion \mathbf{G} um einen *linearen Operator* zwischen den *Banach-Räumen* $T_2(\mathcal{V})$ und $T_2(\mathcal{W})$.

mit $\mathbf{T}, \mathbf{T}_0, \mathbf{U} \in T_2(\mathcal{V})$ und der sogenannten *Fréchet-Ableitung von $\mathbf{G}(\mathbf{T})$ nach \mathbf{T}* ,

$$D\mathbf{G}(\mathbf{T}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \right|_{\mathbf{T}=\mathbf{T}_0}, \quad \text{in Komponenten} \quad (D\mathbf{G})_{ijkl} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial T_{kl}}. \quad (2.2.104)$$

Es wurde angenommen, dass diese Ableitung existiert, also \mathbf{G} *Fréchet-differenzierbar* ist. Auf der Grundlage von (2.2.104) lässt sich die Ableitung einer Funktion nach einem Tensors oft am einfachsten komponentenweise durchführen. Basierend auf (2.2.102) schreiben wir für die Linearisierung von \mathbf{G} an \mathbf{T}_0 in Richtung \mathbf{U} dann

$$\text{LIN}_{\mathbf{T}_0}(\mathbf{G}; \mathbf{U}) = \mathbf{G}(\mathbf{T}_0) + D\mathbf{G}(\mathbf{T}_0) : \mathbf{U}. \quad (2.2.105)$$

Es sei angemerkt, dass die Fréchet-Ableitung $Df(\mathbf{x})$ einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gerade der Matrix der partiellen Ableitungen von f an $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, d.h. ihrer $n \times m$ *Jacobi-Matrix* entspricht.

Nach diesen Vorbemerkungen definieren wir nun die *Richtungsableitung* oder *Gâteaux-Ableitung der Funktion \mathbf{G} an der Stelle \mathbf{T}_0 in Richtung \mathbf{U}* durch

$$\frac{d}{d\lambda} \mathbf{G}(\mathbf{T}_0 + \lambda \mathbf{U})|_{\lambda=0}, \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2.106)$$

Falls \mathbf{G} Fréchet-differenzierbar ist an \mathbf{T}_0 , dann ist die Funktion auch Gâteaux-differenzierbar an \mathbf{T}_0 , weil die Ableitung in Richtung \mathbf{U} existiert. Mit Hilfe der Kettenregel folgt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{G}(\mathbf{T}_0 + \lambda \mathbf{U})|_{\lambda=0} &= \left[\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{T}_0 + \lambda \mathbf{U})}{\partial \mathbf{T}} : \frac{\partial (\mathbf{T}_0 + \lambda \mathbf{U})}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} \\ &= D\mathbf{G}(\mathbf{T}_0) : \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (2.2.107)$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, d.h. nicht jede Gâteaux-differenzierbare Funktion ist auch Fréchet-differenzierbar. Falls $\lambda = t$ den Parameter „Zeit“ repräsentiert und \mathbf{T} zeitabhängig ist, so folgt speziell

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) = D\mathbf{G}(\mathbf{T}) : \dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} : \dot{\mathbf{T}}. \quad (2.2.108)$$

Wir wollen nun einige Beispiele geben, worin $\mathbf{T} \in T_2(\mathcal{V})$ ein beliebiger Tensor zweiter Stufe ist. Die Identitäten (2.2.80)–(2.2.84) führen unmittelbar auf

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial T_{ij}}{\partial T_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (2.2.109)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{sym}}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{1}_{\text{sym}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial (\mathbf{T}_{\text{sym}})_{ij}}{\partial T_{kl}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.2.110)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{sph}}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{1}_{\text{sph}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial (\mathbf{T}_{\text{sph}})_{ij}}{\partial T_{kl}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (2.2.111)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{dev}}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{1}_{\text{dev}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial (\mathbf{T}_{\text{dev}})_{ij}}{\partial T_{kl}} = (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}). \quad (2.2.112)$$

Zusammen mit den bekannten Definitionen und der Kettenregel erhält man dann

$$\frac{\partial \|\mathbf{T}\|}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|}, \quad (2.2.113)$$

$$\frac{\partial(\operatorname{sp} \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I}, \quad (2.2.114)$$

$$\frac{\partial(\det \mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-\mathrm{T}} \det \mathbf{T}. \quad (2.2.115)$$

2.3 Kinematik

Nach dieser Einführung mathematischer Grundlagen beschäftigen wir uns nun mit Begriffen und Gleichungen der Kontinuumsmechanik. Man unterscheidet auf der einen Seite die materialunabhängigen Gleichungen, zu denen kinematische Zusammenhänge und die Bilanzgleichungen einer physikalischen Größe zählen, und auf der anderen Seite die materialabhängigen Gleichungen wie z.B. Stoffgesetze. Die materialabhängigen Gleichungen stellen sicher, dass den unbekanntem Größen dieselbe Anzahl von Gleichungen gegenüber stehen und damit das betrachtete Problem eindeutig lösbar ist.

2.3.1 Bewegung eines Körpers im Raum

Zwei fundamentale Begriffe der Kontinuumsmechanik sind die des materiellen Körpers und des umgebenden Raumes. Der *umgebende Raum* ist der Raum unserer Anschauung, also ein Euklidischer Punktraum $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ der Dimension $m = 2$ oder $m = 3$. Die Punktmenge \mathcal{S} wird dabei als Kontinuum aufgefasst (siehe allgemeine Bemerkungen in Abschn. 2.1), und die Differenz von je zwei Punkten $Q_1, Q_2 \in \mathcal{S}$ definiert einen Vektor $Q_2 - Q_1 = \overrightarrow{Q_1 Q_2} = \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Im Folgenden bezeichnen wir den so definierten umgebenden Raum aus Bequemlichkeit einfach mit $\mathcal{S} = \mathbb{R}^m$ (\mathcal{S} wie „space“).

Wir bezeichnen eine mit Materie gefüllte Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ derselben Dimension m des umgebenden Raumes als *materiellen Körper* (\mathcal{B} wie „body“). Ein Punkt $P \in \mathcal{B}$ heißt *Materialpartikel* und trägt die Eigenschaften des betrachteten Materials. Ist nun $[0, T] \subset \mathbb{R}$ ein gegebenes Zeitintervall, dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_t: \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{S} \\ P &\mapsto Q = \varphi_t(P) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

die *Konfiguration* von \mathcal{B} in \mathcal{S} zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Entsprechend ist $\varphi_t(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}$ die Konfiguration des materiellen Körpers zum Zeitpunkt t , und $Q = \varphi_t(P)$ ist der *Ort des Partikels* P zum Zeitpunkt t . In dem hier betrachteten Euklidischen Punktraum bildet $(\mathcal{B}, \mathcal{W}) \subset (\mathcal{S}, \mathcal{V})$ einen Unterraum, wobei $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. In speziellen Fällen kann (2.3.1) eine affine Abbildung gemäß Abschn. 2.2.2 sein, im Allgemeinen ist sie das jedoch nicht.

Jede Konfiguration drückt über $\mathcal{B} \rightarrow \varphi_t(\mathcal{B})$ eine *Verformung* des Materials aus. Als *Bewegung* des Körpers \mathcal{B} im Raum \mathcal{S} verstehen wir eine Familie von Konfigurationen in Abhängigkeit von $t \in [0, T]$, wobei wir

$$\varphi_t(\cdot) = \varphi(\cdot, t) \quad \text{für feste } t \quad (2.3.2)$$

setzen. Der Einfachheit halber setzen wir außerdem

$$\mathcal{B} = \varphi_0(\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{B}, 0), \quad (2.3.3)$$

d.h. der materielle Körper befindet sich bei $t = 0$ in seiner *Ausgangskonfiguration*. Mit „Materialpartikel“ meinen wir also präzise ausgedrückt denjenigen Ort, den ein Materialpartikel in der Ausgangskonfiguration einnimmt. Die Ausgangskonfiguration kann in der Geotechnik z.B. der K_0 -Zustand sein (Erdruchdruck).

Gemäß Abschn. 2.2.2 existiert im umgebenden Raum ein ortho-normiertes Bezugssystem (O, \mathbf{e}_i) , so dass jedes Materialpartikel $P \in \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ durch kartesische Koordinaten $x_1(P), \dots, x_m(P) \equiv x_i(P)$ eindeutig identifiziert werden kann. Der Ort des Partikels zum Zeitpunkt t besitzt die kartesischen Koordinaten $x_i(Q) = x_i(\varphi(P, t)) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_i(P, t)$. Für die Ortsvektoren bezüglich $O \in \mathcal{S}$ schreiben wir

$$\mathbf{x}(P) = x_i(P) \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varphi}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_i(P, t) \mathbf{e}_i = x_i(\varphi(P, t)) \mathbf{e}_i. \quad (2.3.4)$$

Wir nennen das Vektorfeld $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ definiert durch

$$\mathbf{u}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(P, t) - \mathbf{x}(P) = (\varphi_i - x_i)(P, t) \mathbf{e}_i \quad (2.3.5)$$

das *Verschiebungsfeld*,

$$\mathbf{v}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\boldsymbol{\varphi}}(P, t) = \frac{\partial \varphi_i(P, t)}{\partial t} \mathbf{e}_i \quad (2.3.6)$$

das *Geschwindigkeitsfeld* und

$$\mathbf{a}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(P, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}(P, t) = \frac{\partial^2 \varphi_i(P, t)}{\partial t^2} \mathbf{e}_i \quad (2.3.7)$$

das *Beschleunigungsfeld* des Körpers. Offensichtlich ist $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ und $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}$.

2.3.2 Verformung und Verzerrung

Der sog. *Deformationsgradient* \mathbf{F} ist das Differential der Bewegung φ_t und bildet zu jedem Zeitpunkt t infinitesimale Vektoren $d\mathbf{x}(P)$ des materiellen Körpers linear auf infinitesimale Vektoren $d\boldsymbol{\varphi}(P, t)$ des umgebenden Raumes ab:

$$d\boldsymbol{\varphi}(P, t) = \mathbf{F}(P, t) \cdot d\mathbf{x}(P). \quad (2.3.8)$$

Der Deformationsgradient ist daher ein Tensorfeld zweiter Stufe, jedoch nicht im herkömmlichen Sinne, und besitzt die lokale Darstellung

$$\mathbf{F}(P, t) = \nabla \boldsymbol{\varphi}(P, t) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(P, t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \stackrel{\text{def}}{=} F_{ij}(P, t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.3.9)$$

Aufgrund von (2.3.5) gilt außerdem

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}, \quad \text{mit} \quad \nabla \mathbf{u}(P, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(P, t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.3.10)$$

$\nabla \mathbf{u}$ ist der *Verschiebungsgradient*.

Deformationsgradient und Verschiebungsgradient beinhalten sämtliche Verformungen des materiellen Körpers \mathcal{B} , also sowohl Streckungen als auch Rotationen, und sind daher keine geeigneten Verzerrungsmaße. Anders verhält es sich mit dem *Green-Lagrange Tensor*

$$\mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \in \mathcal{T}_2(\mathcal{B}). \quad (2.3.11)$$

Der Green-Lagrange Tensor beschreibt die Längenänderung infinitesimaler materieller Vektoren $d\mathbf{x}$, denn mit (2.3.8) gilt

$$\|d\varphi\|^2 - \|d\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}) - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.3.12)$$

Die Definition (2.3.11) führt zusammen mit (2.3.10) auf den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}((\nabla \mathbf{u}^T + \mathbf{I}^T) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Im Folgenden setzen wir voraus, dass die Materialverformungen (Streckungen und Rotationen) infinitesimal klein sind. Der quadratische Term in (2.3.13) kann dann vernachlässigt werden, d.h.

$$\text{sp}(\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) = \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \approx 0. \quad (2.3.14)$$

Der so entstandene Tensor heißt *linearer* bzw. *infinitesimaler Verzerrungstensor*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\text{sym}} \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3.15)$$

bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$, und $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Offensichtlich ist

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (2.3.16)$$

Bei den Komponenten des infinitesimalen Verzerrungstensors unterscheiden wir

$$\text{Dehnungen (bzw. Normaldehnungen):} \quad \varepsilon_{ij} \quad \text{mit } i = j, \quad (2.3.17)$$

$$\text{Gleitungen (bzw. Scherdehnungen):} \quad 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} \quad \text{mit } i \neq j. \quad (2.3.18)$$

Um mit den Verzerrungen, also den Ableitungen der Bewegung nach dem Ort, eine dazu kompatible Bewegung bzw. ein kompatibles Verschiebungsfeld rekonstruieren zu können, müssen die sog. *Kompatibilitätsbedingungen* eingehalten werden. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Literatur.

2.4 Bilanzgleichungen

2.4.1 Allgemeine Formen

Bilanzgleichungen geben die Gesetzmäßigkeiten an, nach welchen sich eine bestimmte Feldgröße in einem physikalischen System verhält, wenn sich dieses System in der Zeit ändert (physikalischer Prozess). Die zwei wichtigsten Feldgrößen für die Beschreibung mechanischer Prozesse sind die Masse und der Impuls. Bilanzgleichungen können in globaler Form (Integralform) oder in lokaler Form (Differentialgleichung) angegeben werden. Beide Darstellungsformen sind für die hier betrachteten Prozesse äquivalent.

Die *globale Form* einer Bilanzgleichung bezieht sich auf eine beliebige Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ des materiellen Körpers mit Rand $\partial\mathcal{U}$, die sich im umgebenden Raum gemäß (2.3.1) bewegt und zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Konfiguration $\varphi_t(\mathcal{U}) \subset \varphi_t(\mathcal{B})$ einnimmt. Unter der getroffenen Annahme infinitesimal kleiner Verformungen ändert sich die Konfiguration des Körpers praktisch nicht mit der Zeit und wir können

$$\varphi_t(\mathcal{U}) = \varphi(\mathcal{U}, t) \approx \mathcal{U} \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad (2.4.1)$$

setzen.

Es sei nun $q(P, t)$ ein zeitabhängiges Tensorfeld beliebiger Stufe, $b(P, t)$ eine gegebenen Quelle bzw. Senke für q pro Einheitsvolumen und $u(P, t, \mathbf{n}(P))$ eine Quelle bzw. Senke pro Einheitsfläche für alle $P \in \mathcal{B}$ und $t \in [0, T]$. Das Vektorfeld \mathbf{n} bezeichnet die nach außen gerichteten Einheitsnormalen auf der betrachteten Fläche. Die Größen q , b und u erfüllen die *globale allgemeine Bilanzgleichung* falls

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} q(P, t) dv = \int_{\mathcal{U}} b(P, t) dv + \int_{\partial\mathcal{U}} u(P, t, \mathbf{n}(P)) da . \quad (2.4.2)$$

Hierin bezeichnen dv die *Volumendichte* bzw. das *infinitesimale Volumenelement* und da die *Oberflächendichte* bzw. das *infinitesimale Flächenelement* des umgebenden Raumes.

Das Gebiet \mathcal{U} ist definitionsgemäß zeitunabhängig, also ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} q(P, t) dv = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial q(P, t)}{\partial t} dv \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{U}} \dot{q}(P, t) dv . \quad (2.4.3)$$

Die Form des Integranden $u(P, t, \mathbf{n}(P))$ auf der rechten Seite steht mit einem Meilenstein der Kontinuumsmechanik im Zusammenhang: dem *Cauchy Theorem*. Dieses besagt, dass bei einer gewissen Stetigkeit von u ein Feld \mathbf{u} existiert, für welches

$$u(P, t, \mathbf{n}(P)) = \mathbf{u}(P, t) \cdot \mathbf{n}(P) . \quad (2.4.4)$$

Integriert man die rechte Seite über ein berandetes Gebiet, so gilt der wichtige *Integralsatz von Gauß* bzw. das *Divergenz-Theorem*

$$\int_{\mathcal{U}} (\text{div } \mathbf{u}) dv = \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} da . \quad (2.4.5)$$

Mit (2.4.3), (2.4.4) und (2.4.5) sowie der Voraussetzung, dass die Bilanzgleichung für beliebige berandete Gebiete $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ gelten muss, erhält man aus der globalen Form die *lokale allgemeine Bilanzgleichung*

$$\dot{q}(P, t) = b(P, t) + \operatorname{div} \mathbf{u}(P, t), \quad \text{für alle } P \in \mathcal{B} \text{ und } t \in [0, T]. \quad (2.4.6)$$

Durch Einsetzen spezieller Felder für q , b und u bzw. \mathbf{u} in die allgemeine Bilanzgleichung erhält man spezielle Bilanzgleichungen. Wir zeigen dies anhand der Massenbilanz und Impulsbilanz.

2.4.2 Massenbilanz (Massenerhaltungssatz)

Mit der Massenbilanz wird die Änderung der *Massendichte* $\rho(P, t) \geq 0$ in einem physikalischen Prozess beschrieben, d.h. in (2.4.2) setzen wir $q \stackrel{\text{def}}{=} \rho$. In einem abgeschlossenen System, in dem keine Masse mit der Umgebung ausgetauscht wird und auch keine Masse produziert wird oder verloren geht, muss $b = u \equiv 0$ gelten. Die Massendichte heißt in diesem Fall eine *Erhaltungsgröße*, und die Massenbilanz ist gleichbedeutend mit dem *Massenerhaltungssatz*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho(P, t) dv = 0, \quad (2.4.7)$$

wobei wir wiederum infinitesimal kleine Verformungen vorausgesetzt haben. Im allgemeinen Fall großer Verformungen gilt hingegen

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho(P, t) J(P, t) dv = 0. \quad (2.4.8)$$

Hierin bezeichnet $J \stackrel{\text{def}}{=} \det \mathbf{F} > 0$ die *Jacobi-Determinante der Bewegung* $\varphi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Diese beschreibt die volumetrische Verformung eines Körpers, so dass der globale Massenerhaltungssatz (2.4.8) äquivalent ist zu der lokalen Form

$$\rho(P, t) J(P, t) = \rho_0(P), \quad \text{mit } \rho_0(P) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(P, 0) \quad \text{und} \quad J(P, 0) = 1. \quad (2.4.9)$$

Im Falle kleiner Verformungen ist $J \approx 1$ für alle $P \in \mathcal{B}$ und $t \in [0, T]$. Die lokale Form des Massenerhaltungssatzes kann dann basierend auf (2.4.6) dargestellt werden als

$$\dot{\rho} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho = \text{const.} \quad (2.4.10)$$

Wir haben hier die Massenbilanz in einer für die Festkörpermechanik geeigneten Form dargestellt (sog. *materielle* oder *Lagrange'sche Darstellung*). In der Strömungsmechanik wird im Gegensatz dazu keine Teilmenge des materiellen Körpers, sondern ein ortsfestes Gebiet des umgebenden Raumes betrachtet (sog. *räumliche* oder *Euler'sche Darstellung*). Die lokale Massenbilanz erhält dadurch die Form der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.4.11)$$

Die einzelnen Terme sind dabei Funktionen fester Raumpunkte $Q = \varphi(P, t) \in \mathcal{S}$, die von Partikeln des materiellen Körpers im Laufe der Zeit eingenommen werden.

2.4.3 Impulsbilanz und Spannungstensor

Die Impulsbilanz bildet eine der Grundgleichungen der klassischen Mechanik und ist dort unter den Namen *zweites Newton'sches Gesetz* oder *erstes Cauchy-Euler'sches Bewegungsgesetz* bekannt. Die Impulsbilanz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{p} gleich der Summe der angreifenden Volumenkräfte \mathbf{f}_v und Oberflächenkräfte \mathbf{f}_s ist:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \mathbf{f}_v + \mathbf{f}_s . \quad (2.4.12)$$

Im statischen Fall ($\partial \mathbf{p} / \partial t = \mathbf{o}$) erhält man das bekannte *Kräftegleichgewicht*.

Wir wollen nun die Aussagen der Impulsbilanz in der klassischen Mechanik auf die Kontinuumsmechanik übertragen. Dafür unterscheiden wir zunächst *extensive Größen* und *intensive Größen*. Man bezeichnet eine Größe als extensiv, falls diese sich mit der Ausdehnung des betrachteten Kontinuums ändert (Beispiel: Masse). Anderenfalls bezeichnet man die Größe als intensiv (Beispiel: Massendichte). Die Bilanzgleichung (2.4.12) beinhaltet nur extensive Größen.

Der Impuls \mathbf{p} ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Den Impuls eines materiellen Körpers bzw. einer Teilmenge davon erhält man durch Integration des Produkts aus Massendichte und Geschwindigkeit über das Gebiet. Als angreifende Volumenkräfte \mathbf{f}_v berücksichtigen wir ausschließlich solche, die sich aus der Masse und der Wirkung eines *Schwerfeldes* \mathbf{g} (z.B. Erdschwerfeld) ergeben. Die angreifenden Oberflächenkräfte \mathbf{f}_s ergeben sich bei einem Kontinuum durch Integration über den Gebietsrand eines sog. *Spannungsvektorfeldes* \mathbf{t} mit der Einheit Kraft pro Fläche (\mathbf{t} wie „traction“).

Mit diesen Erkenntnissen und Vereinbarungen setzen wir in (2.4.2) also $q \stackrel{\text{def}}{=} \rho \mathbf{v}$, $b \stackrel{\text{def}}{=} \rho \mathbf{g}$ sowie $u \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}$ und erhalten damit die zu (2.4.12) äquivalente *globale Impulsbilanz* eines berandeten Teilgebiets $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ des materiellen Körpers:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho(P, t) \mathbf{v}(P, t) dv = \int_{\mathcal{U}} \rho(P, t) \mathbf{g}(P, t) dv + \int_{\partial \mathcal{U}} \mathbf{t}(P, t, \mathbf{n}(P)) da . \quad (2.4.13)$$

Die lokale Form dieser Bilanzgleichung lässt sich wie oben erläutert herleiten. Insbesondere liefert das Cauchy Theorem (2.4.4) eine Definition des *Spannungsfeldes* $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} , \quad \text{in Komponenten} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j . \quad (2.4.14)$$

Während die Spannungsvektoren \mathbf{t} auf dem Rand wirken, ist der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(P, t) = \sigma_{ij}(P, t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ eine zeitabhängige Größe, die an Partikeln $P \in \mathcal{B}$ im Innern des Körpers wirkt. Entsprechend gilt der Integralsatz von Gauß (2.4.5).

Unter der Voraussetzung der Massenerhaltung (2.4.10) sowie $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}$ folgt dann aus (2.4.13) die *lokale Impulsbilanz*

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{g} + \text{div } \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.4.15)$$

Neben der Impulsbilanz bildet auch die Drehimpulsbilanz eine Grundgleichungen der klassischen Mechanik (vgl. *zweites Cauchy-Euler'sches Bewegungsgesetz*). Im statischen

Fall folgt daraus das *Momentengleichgewicht*. Ohne weiter ins Detail zu gehen sei hier angemerkt, dass die Drehimpulsbilanz unter Voraussetzung der Massenerhaltung und Impulsbilanz auf die Symmetrie des Spannungstensors führt, also

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} . \quad (2.4.16)$$

2.5 Konstitutive Gleichungen

Die im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Bilanzgleichungen reichen allein nicht aus, um eine gegebene mechanische Problemstellung zu lösen. Die Bewegung φ_t beziehungsweise die Komponenten des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} bilden die primären Unbekannten (primären Lösungsvariablen), und die Felder ρ und \mathbf{g} sind in der Regel gegeben. Der Massenerhaltungssatz gibt ρ als (näherungsweise) konstante Größe an, und das Beschleunigungsfeld $\ddot{\mathbf{u}}$ ergibt aus dem Verschiebungsfeld. Für die drei Verschiebungskomponenten im dreidimensionalen Raum stehen genau drei Gleichungen der Impulsbilanz zur Verfügung. Dann verbleiben jedoch die sechs Komponenten des symmetrischen Spannungstensors als Unbekannte.

Konstitutive Gleichungen stellen, allgemein gesprochen, den Bezug zwischen den primären Lösungsvariablen der Bilanzgleichungen und dem Verhalten des Materials her. Im speziellen vorliegenden Fall liefern sie die noch fehlenden Beziehungen zur Bestimmung der Spannungskomponenten³. Einen direkten Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Spannungen aufzustellen ist aus physikalischer Sicht jedoch nicht sinnvoll, wohl aber zwischen den Verschiebungsableitungen und den Spannungen. Man nutzt also die Beziehung (2.3.15) und definiert die Dehnungskomponenten als *unabhängige Variablen*.

Der eindeutige Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen und ggf. weiteren Zustandsvariablen, welcher das reale mechanische Materialverhalten mathematisch beschreiben soll, wird *Materialmodell* oder *Stoffgesetz* genannt. Die hier behandelten elastischen und elasto-plastische Materialmodelle können allgemein durch die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} , \quad \text{in Komponenten} \quad \sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (2.5.1)$$

beschrieben werden. Der Tensor vierter Stufe \mathbf{C} heißt *Steifigkeitstensor*, und $\boldsymbol{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \{\kappa_1, \dots, \kappa_a\}$ ist eine möglicherweise leere Liste von *Zustandsvariablen*, für die wir Evolutionsgleichungen ähnlich zu (2.5.1) voraussetzen. Ohne dass wir im Folgenden nochmals darauf hinweisen gelte das allgemeine Materialmodell (2.5.1) für alle $P \in \mathcal{B}$ und $t \in [0, T]$.

Der Steifigkeitstensor beschreibt eine lineare Abbildung zwischen Tensoren zweiter Stufe und genügt aufgrund der Symmetrie von $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ den *Symmetriebedingungen*

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} . \quad (2.5.2)$$

³Konstitutive Gleichungen gibt es auch in anderen Disziplinen als der Mechanik. Zum Beispiel ist das *Fourier'sche Gesetz*, das die durch Wärmeleitung übertragene Wärmeleistung beschreibt, eine konstitutive Gleichung der Thermodynamik (Wärmelehre).

Es können weitere Symmetriebedingungen vorliegen, sofern der Tensor eine gewisse Isotropie des Materials beschreibt. Für weitere Details, insbesondere im Hinblick auf Materialmodelle für Böden, sei auf Kap. 3 verwiesen.

Kapitel 3

Materialmodelle für Böden

3.1 Allgemeine Bemerkungen

3.1.1 Modelle sind Theorien

Materialmodelle reduzieren und abstrahieren Beobachtungen in der realen Welt (Versuchsergebnisse o.ä.) und basieren auf Annahmen. Alle Materialmodelle sind daher als Versuche zu verstehen, die Realität zu approximieren. Diese Approximation kann mehr oder weniger genau sein, was durch Validierung mit Hilfe von Experimenten überprüft werden muss. Beim Material „Boden“ besteht eine Schwierigkeit darin, dass man sein Verhalten *in situ*, also an Ort und Stelle, kaum untersuchen kann. Stattdessen entnimmt man Proben und untersucht diese im Labor, wobei man versucht die Bedingungen *in situ* nachzuahmen. Schwierig wirkt sich auf die mathematische Modellierung außerdem aus, dass es sich bei Boden um ein komplexes Mehrphasensystem und einen natürlichen Baustoff handelt, dessen Eigenschaften sehr breiten Streuungen unterliegen.

Die Entwicklung von Materialmodellen ist Gegenstand der *Materialtheorie*. Hierin unterscheidet man verschiedene Herangehensweisen bzw. Kategorien von Modellen. *Rheologische Modelle* rekonstruieren gewissermaßen das Materialverhalten durch Reihenschaltung und/oder Parallelschaltung von elementaren, idealisierten *Modellkörpern*. Zu den Modellkörpern gehören der ideal elastische Körper, der ideal viskose Körper und der ideal plastische Körper. Das Federelement (*Hooke-Element*) repräsentiert den ideal elastischen Körper, das Dämpferelement (*Newton-Element*) den ideal viskosen Körper und das Reibungselement (*St.-Venant-Element*) den ideal plastischen Körper. Durch das Zusammenschließen dieser Elemente kann auch komplizierteres Materialverhalten reproduziert werden. Beispielsweise liefert die Reihenschaltung eines Feder- und eines Reibungselements einen linear elastischen-ideal plastischen Körper (sog. *Prandtl-Körper*).

Komplexes Materialverhalten kann durch rheologische Modelle, d.h. Schaltungen von elementaren Modellkörpern, kaum dargestellt werden. *Phänomenologische Modelle* sind

in diesem Fall sehr viel besser geeignet, weil hierbei weitgehend unabhängig von allgemeinen Theorien die Beobachtung selbst als funktionaler Zusammenhang beschrieben wird. Bei den phänomenologischen Materialmodellen unterscheidet man solche, die sich im Wesentlichen aus einer Abänderung oder Erweiterung existierender Modelle ergeben (*induktive Modelle*) von jenen, bei denen eine individuelle Neukonstruktion ausgehend vom allgemeinsten aller möglichen Zusammenhänge erfolgt (*deduktive Modelle*). Die Herangehensweise zur Herleitung induktiver Modelle ist anschaulich und ingenieurmäßig, während die deduktive Modellierung eher abstrakt wirkt und einem *trial and error* folgt.

Es gibt potentiell unendlich viele Möglichkeiten, das mechanische Verhalten eines Materials phänomenologisch zu modellieren. Um diese einzugrenzen, wurden verschiedene Axiome postuliert, deren Gültigkeit in der Community bis heute teilweise heftig diskutiert wird. Wir gehen hierauf nicht ein. Stattdessen wenden wir uns zwei der für die Geotechnik wichtigsten Klassen von (induktiven) Materialmodellen zu: die elastischen und die elasto-plastischen. Zuvor präzisieren wir das hier zugrunde gelegte Modell eines Bodens und führen einige Größen und spezielle Schreibweisen ein, die im Rahmen der Materialtheorie häufig verwendet werden.

3.1.2 Modellannahmen für Boden

In Abschn. 2.1 wurde die Motivation für die Verwendung eines Kontinuum-Modells für Boden erläutert. Dieses Modell soll nun präzisiert werden. Zusätzlich zu den bereits in Kap. 2 getroffenen Annahmen setzen wir folgendes voraus:

- Der betrachtete Boden ist entweder trocken oder vollständig wassergesättigt, so dass der Porenraum entweder nur mit Luft oder nur mit Wasser gefüllt ist.
- Die Bodenkörner und das Porenwasser werden als inkompressibel angesehen.
- Der Kompressionsmodul und die Massendichte von Luft sind vernachlässigbar klein gegenüber dem Kompressionsmodul und der Massendichte des Korngerüsts.
- Bei vollständiger Wassersättigung wird postuliert, dass der betrachtete Boden an jeder Stelle dränieren kann. Konsolidierungseffekte treten daher nicht auf, d.h. die Bewegung der Feststoff- und Fluidphasen sind entkoppelt.
- Die Bodenkörner sind permanent, d.h. sie sind unzerbrechlich und verschleifen nicht durch Abrasion.
- Oberflächeneffekte wie z.B. Kapillarität oder Zementierung von Körnern bleiben unberücksichtigt.
- Die Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit, d.h. Rateneffekte (Viskosität), sei vernachlässigbar klein.

Aufgrund dieser Annahmen kann Boden als *homogene Mischung* bzw. *effektives Einphasenmaterial* modelliert werden. Alle Phasen des Bodengemisches (Korngerüst und

Luft bzw. Wasser) bewegen sich auf dieselbe Weise, d.h. es findet keine Relativbewegung statt. Lediglich die Volumenanteile jeder Phase gehen in die Modellierung ein. Ein Beispiel hierfür ist die Massendichte eines wassergesättigten Bodens, (2.1.1), die wir im Abschn. 2.1 erwähnt hatten.

Basierend auf den Annahmen definiert man die *Massendichte des gesättigten Bodens*

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} (1 - n)\rho_s + n\rho_f, \quad (3.1.1)$$

und setzt $f = w$ falls der Boden wassergesättigt ist (w wie „water“), und $f = a$ falls der Boden trocken, also mit Luft gesättigt ist (a wie „air“). ρ_f ist die Massendichte des Porenfluids (f wie „fluid“). Mit $\rho_f = \rho_w$ folgt dann $\rho = \rho_r$, und mit $\rho_f = \rho_a \approx 0$ erhalten wir die bekannte *Massendichte des trockenen Bodens*

$$\rho_d \stackrel{\text{def}}{=} (1 - n)\rho_s. \quad (3.1.2)$$

Auf gleiche Weise verallgemeinert definiert man die *Massendichte des Bodens unter Auftrieb* oder *effektive Massendichte*

$$\rho' \stackrel{\text{def}}{=} \rho - \rho_f = (1 - n)(\rho_s - \rho_f). \quad (3.1.3)$$

Im Falle $\rho_f = \rho_a \approx 0$ folgt wie erwartet $\rho' = \rho_d = \rho$, während sich für $\rho_f = \rho_w$ die Dichte des wassergesättigten Bodens tatsächlich um die Auftriebswirkung verringert, d.h. $\rho' \leq \rho_r$.

Gl. (3.1.3) nehmen wir im Sinne von Terzaghi zum Anlass, das in der Bodenmechanik übliche *Prinzip der effektiven Spannung* folgendermaßen zu definieren:

$$\boldsymbol{\sigma}' \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma} + p_f \mathbf{I}. \quad (3.1.4)$$

Demnach lässt sich die über ein repräsentatives Volumen gemittelte Spannung im Korngerüst $\boldsymbol{\sigma}'$ (*effektive Spannung*) darstellen als die Summe der messbaren totalen Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ im Boden und dem ebenfalls gemittelten Druck p_f , der von dem Porenfluid auf das Korngerüst wirkt. Falls der Porenraum mit Luft gefüllt ist, dann gilt aufgrund der Voraussetzungen (Massendichte und Kompressionsmodul vernachlässigbar) $p_f = p_a \approx 0$, also

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.1.5)$$

Wir gehen zur Vereinfachung der Schreibweise für den Rest des Kapitels von der letzten Identität aus und bezeichnen die Spannung stets mit $\boldsymbol{\sigma}$. Wir behalten jedoch im Hinterkopf, dass bei der Modellierung des Bodenverhaltens stets die effektiven Spannungen gemeint sind.

3.1.3 Spannungs- und Dehnungsinvarianten¹

Wenn das mechanische Verhalten eines Materials gewisse Symmetrien wie z.B. Isotropie aufweist, so können diese bei der Formulierung von Materialmodellen ausgenutzt werden. Beispielsweise lassen sich Operationen mit Tensoren in Teilen oder vollständig in

¹Aufgrund der im Abschn. 1.5 vereinbarten Vorzeichenkonvention gibt es u.U. Abweichungen zwischen den hier angegebenen Definitionen und den in der Bodenmechanik üblichen!

Operationen mit skalaren, invarianten Größen überführen, wodurch Zusammenhänge leichter überschaubar und überprüfbar werden. Selbst ohne die Betrachtung möglicher Isotropien ist die Definition von *Vergleichsspannungen* und *Vergleichsdehnungen* sinnvoll, um reale, mehrachsige Beanspruchungen in fiktive, einachsige Beanspruchungen zu überführen. Eine Vergleichsspannung sollte zwei Bedingungen erfüllen, nämlich (i) den Spannungszustand möglichst umfassend beschreiben und (ii) versagensrelevante Informationen beinhalten. Letztere liegen z.B. in den Fließ- und Bruchkriterien der Festigkeitslehre (Plastizitätstheorie).

Für die Definition von Invarianten des Cauchy-Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$ sowie des infinitesimalen Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}(P, t)$ greifen wir auf die Beziehungen und Operationen für symmetrische Tensoren zweiter Stufe aus Kap. 2 zurück. Wir legen allen Betrachtungen den dreidimensionalen Euklidischen Raum $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^3$ zugrunde, mit der ortho-normierten Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \mathbb{R}^3$ und den kartesischen Koordinaten $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} x$, $x_2 \stackrel{\text{def}}{=} y$, $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} z$. Der Spannungstensor und der Dehnungstensor besitzen dann jeweils die Darstellungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \text{mit } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1.6)$$

Spannungsinvarianten und Haigh-Westergaard Koordinaten

Der Spannungstensor wird additiv aufgespalten in seinen Kugeltensor und Deviator:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s}. \quad (3.1.7)$$

Hierin bezeichnet

$$p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{3} \text{sp } \boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.1.8)$$

die (*negative*) *mittlere Spannung*, und $\mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$. Bei reinen Festkörpern ohne innere Zwangsbedingungen ist die negative mittlere Spannung äquivalent zum *Druck* und damit ein Maß für den Widerstand, den der Körper einer Volumenänderung entgegensetzt.

Wir bezeichnen die Hauptinvarianten von $\boldsymbol{\sigma}$ mit I_1, I_2, I_3 und diejenigen von \mathbf{s} mit $J_1, -J_2, J_3$; die Verwendung des negativen Wertes von J_2 ist eine allgemein übliche Konvention. Darüber hinaus seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{\sigma}$ (Hauptspannungen) und s_1, s_2, s_3 die Eigenwerte von \mathbf{s} . Die Definitionen (2.2.87)–(2.2.89) liefern dann

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -3p \quad (3.1.9)$$

sowie

$$J_1 = s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3p = 0, \quad (3.1.10)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{13}^2) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ = \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2), \quad (3.1.11)$$

$$J_3 = \det(s_{ij}) = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) = s_1 s_2 s_3. \quad (3.1.12)$$

mit $s_{ij} = \sigma_{ij} + p$ falls $i = j$, und $s_{ij} = \sigma_{ij}$ falls $i \neq j$. Es besteht der Zusammenhang

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2) \quad \text{und} \quad J_3 = \frac{1}{27}(2I_1^3 - 9I_1I_2 + 27I_3). \quad (3.1.13)$$

Mit Hilfe der zweiten Invariante des Spannungsdeviators definiert man die *von-Mises-Spannung* oder *Deviatorspannung*

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\|, \quad (3.1.14)$$

welche ein Maß für die mittlere Schubspannung darstellt. Demgegenüber ist p ein Maß für die mittlere Normalspannung.

Im Triaxialgerät, einem der wichtigsten Versuchsstände in der experimentellen Bodenmechanik, werden axialsymmetrische Spannungszustände realisiert. Die Komponente σ_1 bezeichnet dann die Axialspannung und $\sigma_3 = \sigma_2$ die Radialspannung. Unter diesen Bedingungen folgen aus (3.1.11) und (3.1.11) dann

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) \quad \text{und} \quad q = |\sigma_1 - \sigma_3|. \quad (3.1.15)$$

Für die Deviatorspannung werden häufig auch negative Werte zugelassen, also

$$q = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3.1.16)$$

Unter Beachtung der Symmetrie spannt die Menge aller Spannungstensoren einen sechsdimensionalen Spannungsraum auf. Die Hauptachsentransformation reduziert die Anzahl der Spannungskomponenten auf drei und ermöglicht dadurch die Darstellung des Spannungszustands im Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . In diesem so definierten *Spannungsraum* mit Ursprung $O \in \mathbb{R}^3$ besitzt ein *Spannungspunkt* S die kartesischen Koordinaten $\{\sigma_1(S), \sigma_2(S), \sigma_3(S)\}$, so dass

$$\overrightarrow{OS} = \sigma_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 = \sigma_i \mathbf{e}_i, \quad \text{mit } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1.17)$$

seinen Ortsvektor beschreibt. Dieser Vektor wird dargestellt als Summe

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS}, \quad (3.1.18)$$

worin

$$\overrightarrow{OM} \stackrel{\text{def}}{=} -p \mathbf{e}_1 - p \mathbf{e}_2 - p \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3} I_1 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad (3.1.19)$$

$$\overrightarrow{MS} \stackrel{\text{def}}{=} s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2 + s_3 \mathbf{e}_3 = s_i \mathbf{e}_i = (\sigma_i + p) \mathbf{e}_i. \quad (3.1.20)$$

Gl. (3.1.18) entspricht der Aufspaltung (3.1.7) in einen sphärischen Anteil und einen deviatorischen Anteil, hier jedoch dargestellt im dreidimensionalen Spannungsraum. Es gilt

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MS} = -s_1 p \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 - s_2 p \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 - s_3 p \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -(s_1 + s_2 + s_3)p = 0, \quad (3.1.21)$$

d.h. \overrightarrow{OM} und \overrightarrow{MS} sind orthogonal zueinander.

Der sphärische Anteil \overrightarrow{OM} ist ein Vektor entlang der *hydrostatischen Achse*

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 , \quad (3.1.22)$$

die auch als *Äquisektrix* bezeichnet wird. Die Richtung von \overrightarrow{OM} ist daher für alle Spannungszustände gleich. Der hydrostatischen Achse kann der nicht-normierte Basisvektor

$$\mathbf{e}_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{e}_p\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad (3.1.23)$$

zugewiesen werden, woraus sich

$$\overrightarrow{OM} = -p\mathbf{e}_p , \quad \text{mit} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = |I_1|/\sqrt{3} \stackrel{\text{def}}{=} |\xi| \quad (3.1.24)$$

ergibt. Man beachte, dass $\xi \neq p$.

Die Ebene, die von \overrightarrow{OM} und \overrightarrow{MS} aufgespannt wird, heißt *Meridianebene des Spannungspunktes S*. Die Ebene senkrecht zur hydrostatischen Achse \overrightarrow{OM} heißt *Deviatorebene* oder π -Ebene und wird durch die Gleichung

$$I_1 - \sqrt{3}\xi = 0 \quad (3.1.25)$$

eindeutig beschrieben. Die Koordinate ξ ist dann der Abstand zwischen dem Ursprung O und dem Spannungspunkt M in der Deviatorebene, gemessen entlang der Flächennormalen \overrightarrow{OM} . Mit (3.1.23) folgt aus (3.1.20)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MS} &= \sigma_i \mathbf{e}_i + p\mathbf{e}_p \\ &= s_1(\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + s_2(\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) + s_3(\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) , \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

und

$$\|\overrightarrow{MS}\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2} = \|\mathbf{s}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}q \stackrel{\text{def}}{=} \rho . \quad (3.1.27)$$

Das Spannungsmaß ρ ist der Radius eines Kreises in der Deviatorebene mit Mittelpunkt M , auf dem der Spannungspunkt S liegt.

Die Projektion \mathbf{e}_i^* eines Basisvektors \mathbf{e}_i , mit $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, entlang der Normalen \mathbf{e}_p auf die Deviatorebene hat die Länge

$$\|\mathbf{e}_i^*\| = \cos\left(\arctan\left(1/\sqrt{2}\right)\right) = \sqrt{2/3} , \quad \text{so dass} \quad \mathbf{e}_i = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{e}_i^* . \quad (3.1.28)$$

In der Projektion besitzen die Basisvektoren also die verkürzte Länge $\sqrt{2/3}$. Dies kann mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen am Einheitswürfel leicht gezeigt werden. Entsprechend gilt für die Komponenten des deviatorischen Anteils des Spannungsvektors in der Projektion auf die Deviatorebene

$$\overrightarrow{MS} \cdot \mathbf{e}_i^* = \sqrt{\frac{2}{3}}(s_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = \sqrt{\frac{2}{3}} s_j \delta_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} s_i \stackrel{\text{def}}{=} s_i^* . \quad (3.1.29)$$

Der Spannungszustand wäre durch Angabe der skalaren Größen ξ und ρ allein noch nicht eindeutig bestimmt. Man benötigt außerdem noch die Richtung von \overrightarrow{MS} , die in

Form eines Rotationswinkels θ , dem *Lode-Winkel*, angegeben wird. Werden die Hauptspannungen so sortiert, dass

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (3.1.30)$$

gilt, dann kann der Wertebereich dieses Winkels aus Symmetriegründen auf ein Sechstel des Vollkreises eingeschränkt werden. Eine mögliche Definition des Lode-Winkels lautet dann

$$\cos(3\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}, \quad \text{mit } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}. \quad (3.1.31)$$

Der Lode-Winkel ist dann auf der Deviatorebene zu messen als der Winkel zwischen der σ_1 -Achse und \overline{MS} .

Ein Spannungszustand kann sowohl durch die Hauptspannungen $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ als auch durch das Tripel $\{\xi, \rho, \theta\}$ ausgedrückt werden. Letzteres definiert das sog. *Haigh-Westergaard Koordinatensystem*.

Hier sei noch angemerkt, dass der Lode-Winkel mit verschiedenen Belastungssituationen bzw. Belastungsrichtungen im Zusammenhang steht:

$$\begin{array}{ll} \theta = \pi/3 & \text{Triaxiale Kompression, } \sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3, \\ \theta = \pi/6 & \text{Reine Scherung, } \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ \theta = 0 & \text{Triaxiale Extension, } \sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3. \end{array}$$

Der Fall der reinen Scherung führt auf

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}\sigma_1 + \frac{3}{2}\sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (3.1.32)$$

sowie

$$s_1 = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad (3.1.33)$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 0, \quad (3.1.34)$$

$$s_3 = \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (3.1.35)$$

Die hieraus abgeleiteten Spannungsinvarianten

$$s \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \text{und} \quad t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (3.1.36)$$

entsprechen der mittleren Spannung und maximalen Schubspannung bei ebener Scherung bzw. im Triaxialversuch mit axialsymmetrischem Spannungszustand (σ_1 : Axialspannung, $\sigma_3 = \sigma_2$: Radialspannung).

Dehnungsinvarianten

Die Dehnungsinvarianten definiert man gerade so, dass sie mit den Spannungsinvarianten arbeitskonforme Paare bilden, d.h.

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_i \varepsilon_i = p \varepsilon_p + q \varepsilon_q, \quad (3.1.37)$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{\varepsilon}$ (Hauptdehnungen) sind. Die Größe ε_p entspricht dann der *Volumendehnung* und ε_q ist eine *äquivalente Scherdehnung*, mit

$$\varepsilon_p \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\text{vol}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{sp } \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (3.1.38)$$

$$\varepsilon_q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2}{3}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}\| = \sqrt{\frac{4}{3} J_2^\varepsilon}. \quad (3.1.39)$$

Hierin bezeichnet J_2^ε die (negative) zweite Hauptinvariante des Dehnungsdeviators $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}$. Die Aufspaltung des Dehnungstensors in Kugelanteil und Deviator erfolgt schließlich analog zum Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \varepsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}. \quad (3.1.40)$$

Für die Komponenten von $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}$ schreiben wir vereinfachend $e_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}})_{ij}$.

Der Vollständigkeit halber geben wir die Formeln der Invarianten für den Fall axial-symmetrischer Dehnungszustände (ε_1 : Axialdehnung, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$: Radialdehnung) an:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 \quad \text{und} \quad \varepsilon_q = \frac{2}{3} |\varepsilon_1 - \varepsilon_3|. \quad (3.1.41)$$

Auch hier lässt man häufig negative Werte für ε_q zu, also

$$\varepsilon_q = \frac{2}{3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3). \quad (3.1.42)$$

Auf diese Weise erhält man Größen, die zu den gemäß (3.1.15) berechneten Spannungs-invarianten arbeitskonform sind.

3.2 Elastische Modelle

3.2.1 Lineare Elastizität

Elastizität drückt aus, dass die unter einer Belastung auftretenden Verformungen reversibel sind. Wird eine elastische Materialprobe belastet und anschließend um das gleiche Maß wieder entlastet, so geht die Probe in ihre Ausgangskonfiguration zurück. Bei einer linear elastischen Probe ist die Verformung darüber hinaus proportional zur Belastung. Reales Bodenverhalten ist nur bei sehr kleinen Verzerrungsamplituden ($<10^{-6}$) linear elastisch. Die lineare Elastizität eignet sich daher gut für die Berechnung der Wellenausbreitung im Baugrund, jedoch nicht für Verformungsberechnungen bis zur Grenzlast.

Zu den einfachsten Materialmodellen für Festkörper zählt die *lineare isotrope Elastizität* bzw. das *verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz*

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{in Komponenten} \quad \sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}. \quad (3.2.1)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{C}^e den *konstanten linearen isotropen Elastizitätstensor*. Dieser Tensor enthält also nur Konstanten und kann lokal dargestellt werden durch

$$\mathbf{C}^e \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{1}_{\text{sym}} \quad \text{bzw.} \quad C_{ijkl}^e \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (3.2.2)$$

Die Faktoren λ und μ bezeichnen die *Lamé-Konstanten*, \mathbf{I} ist der Einheitstensor zweiter Stufe und $\mathbf{1}_{\text{sym}}$ der *symmetrisierende Einheitstensor vierter Stufe* oder *Symmetrierer* gemäß (2.2.82). Für (3.2.1) können wir mit den Definitionen aus dem letzten Abschnitt auch

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \varepsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.2.3)$$

schreiben. Diese Darstellung des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes enthält nur Tensoren zweiter Stufe.

In der Bodenmechanik werden die Lamé-Konstanten üblicherweise ersetzt durch den *Kompressionsmodul* und den *Schubmodul*,

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \text{und} \quad G = \mu . \quad (3.2.4)$$

Mit Hilfe des *Elastizitätsmoduls* E und der *Querdehnzahl* ν lassen sich diese elastischen Konstanten auch ausdrücken als

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} . \quad (3.2.5)$$

Auf diese Weise erhält man eine weitere Darstellung des Materialmodells (3.2.1):

$$\boldsymbol{\sigma} = K \varepsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = K \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij} , \quad (3.2.6)$$

so dass

$$\mathbf{C}^e = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \mathbf{1}_{\text{dev}} . \quad (3.2.7)$$

$\mathbf{1}_{\text{dev}}$ ist der *Deviator-Einheitstensor vierter Stufe* gemäß (2.2.84). Die inverse Form von (3.2.6) drückt die Dehnung als Funktion der Spannung aus:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{p}{3K} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \mathbf{s} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{p}{3K} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} s_{ij} . \quad (3.2.8)$$

Aufgrund der vorausgesetzten Isotropie lässt sich das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz sogar auf zwei skalare Gleichungen reduzieren. Mit den Aufspaltungen (3.1.7) und (3.1.40) und den damit einhergehenden Definitionen des vorangegangenen Abschnitts folgt nämlich

$$p = -K \varepsilon_{\text{vol}} \quad \text{und} \quad q = 3G \varepsilon_q . \quad (3.2.9)$$

Beispiel: Kompression mit behinderter Seitendehnung

Als ein einfaches Anwendungsbeispiel der linearen isotropen Elastizität betrachten wir nun eine Bodenprobe, die in ihrer Seitendehnung behindert ist und sich lediglich in z -Richtung frei verformen kann, d.h. $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ und $\varepsilon_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Man spricht hierbei von *ödometrischen Randbedingungen*, welche im Ödometerversuch realisiert werden und näherungsweise für einen homogenen Halbraum in situ gelten.

Setzt man die angegebenen Bedingungen in (3.2.6) ein, so besteht unter Beachtung von (3.2.5) zwischen der Spannung in z -Richtung σ_{33} und den Dehnungen der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= K\varepsilon_{kk}\delta_{33} + 2G(\varepsilon_{33} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}) = K\varepsilon_{33} + 2G(\varepsilon_{33} - \frac{1}{3}\varepsilon_{33}) = (K + \frac{4}{3}G)\varepsilon_{33} \\ &= E\left(\frac{1}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{6(1+\nu)}\right)\varepsilon_{33} = E\frac{6(1+\nu) + 12(1-2\nu)}{18(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{33} \\ &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{33}.\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

Der Faktor

$$E_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.2.11)$$

ist der *linear elastische Steifemodul*. Er entspricht dem Elastizitätsmodul bei behinderter Seitendehnung.

Wir nehmen nun an, dass bei einer gleichmäßigen Belastung in negative z -Richtung $\sigma_0 = -\sigma_{33} \neq 0$ unter ödometrischen Randbedingungen die seitlichen Spannungen gerade den Wert $\sigma_{11} = \sigma_{22} = K_0\sigma_{33}$ besitzen, worin $K_0 \geq 0$ dem Erdruchdruckbeiwert entspricht. Es gilt darüber hinaus aufgrund des vorausgesetzten isotropen Verhaltens $\sigma_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Aus (3.2.8) und (3.2.5) folgt dann zunächst

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{9K}\sigma_{kk}\delta_{11} + \frac{1}{2G}(\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}) \\ &= \left(\frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}\right)(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= \frac{1-2\nu+2(1+\nu)}{3E}\sigma_{11} + \frac{1-2\nu-(1+\nu)}{3E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) \\ &= 0.\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

Einsetzen von $\sigma_{11} = \sigma_{22} = K_0\sigma_{33}$ liefert nach kurzem Umformen schließlich eine Beziehung zwischen der Querdehnzahl und dem Erdruchdruckbeiwert:

$$\nu = \frac{K_0}{1+K_0} \quad \text{bzw.} \quad K_0 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \text{mit } -1 < \nu < 0,5. \quad (3.2.13)$$

Der zulässige Wertebereich von ν ergibt sich unmittelbar aus (3.2.5). Wenn also linear isotrop elastisches Bodenverhalten vorausgesetzt wird, dann gilt entsprechend

$$-0,5 < K_0 < 1. \quad (3.2.14)$$

Der Erdruchdruckbeiwert eines Bodens kann mit Hilfe der empirischen *Formel von Jaky*,

$$K_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sin \phi', \quad (3.2.15)$$

abgeschätzt werden. Hierin ist ϕ' der Reibungswinkel des Bodens. Es sei jedoch angemerkt, dass die Formel bei bestimmten Baugrundsituationen den Erdruchdruck unterschätzt und K_0 durchaus Werte größer als Eins annehmen kann.

3.2.2 Nichtlineare Elastizität

Bei Verzerrungsamplituden $>10^{-6}$ zeigen sowohl bindige als auch nichtbindige Böden ein nichtlineares mechanisches Verhalten. Bis zu einer Verzerrungsamplitude von ungefähr 10^{-4} bleiben die Verformungen jedoch reversibel, so dass Böden in diesem Bereich der Beanspruchung durch nichtlinear elastische Materialmodelle auf geeignete Weise abgebildet werden.

Nichtlinear elastische Modelle besitzen die allgemeine Form

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^s(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_*^s(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.2.16)$$

d.h. der Steifigkeitstensor \mathbf{C}^s ist abhängig von der Spannung bzw. der Dehnung und gegebenenfalls weiteren Zustandsvariablen. Der hochgestellte Index s drückt aus, dass es sich um eine *Sekantensteifigkeit* handelt (s wie „Sekante“). Diese wird als Sekante durch einen gegebenen Punkt $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ einer Spannungs-Dehnungs-Kurve $\sigma(\varepsilon)$ gemessen, mit $\sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\varepsilon_0)$. Im eindimensionalen Fall gilt also

$$C^s(\sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} \right|_{\varepsilon_0}. \quad (3.2.17)$$

Demgegenüber ist die *Tangentensteifigkeit* definiert als Tangente an die Kurve $\sigma(\varepsilon)$ im Punkt $(\varepsilon_0, \sigma_0)$:

$$C^t(\sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_0}. \quad (3.2.18)$$

Die Tangentensteifigkeit ist der Steifigkeitstensor in der *Ratenform* von (3.2.16),

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^t(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_*^t(\boldsymbol{\varepsilon}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.2.19)$$

Die $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ - $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ -Beziehung ist in der Bodenmechanik die bevorzugte Form eines Materialmodells, weil die $\boldsymbol{\sigma}$ - $\boldsymbol{\varepsilon}$ -Beziehung stark nichtlinear und in der Regel auch pfadabhängig bzw. geschichtsabhängig ist.

Die Definition der Elastizität verlangt *Pfadunabhängigkeit*, d.h. unabhängig vom Dehnungspfad (bzw. Spannungspfad) ist jedem Wert der Dehnung ein eindeutiger Wert der Spannung (bzw. Dehnung) zugeordnet. Anders ausgedrückt muss die Beziehung (3.2.19) integrierbar ist. Es muss also eine eindeutige und invertierbare Beziehung zwischen der Spannung und der Dehnung existieren, und nicht nur zwischen der Spannungs- und der Dehnungsrate.

Einen Spezialfall der vorangegangenen Beziehungen stellt die *nichtlineare isotrope Elastizität* dar. Diese wird ebenfalls durch die Spannungs-Dehnungs-Beziehung (3.2.6) bzw. (3.2.9) dargestellt, allerdings sind in diesem Fall K und G spannungs- bzw. dehnungsabhängig.

Ein anderes, in der Bodenmechanik weit verbreitetes nichtlinear elastisches Materialmodell ist das *Duncan-Chang Modell*. Es beruht auf der Beobachtung, dass die

Spannungs-Dehnungs-Kurve bei einem Triaxialversuch durch eine Hyperbel angenähert werden kann:

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varepsilon_1}{q} \stackrel{\text{def}}{=} a + b\varepsilon_1. \quad (3.2.20)$$

Hierin sind $q = \sigma_1 - \sigma_3$ die Deviatorspannung und ε_1 die Axialdehnung, a ist der Kehrwert der anfänglichen Tangentensteifigkeit und b der Kehrwert des Grenzwertes q_{ult} bei sehr großen Axialdehnungen. Die rechte Gleichung ergibt sich durch einfache Umformung der linken Gleichung und beschreibt eine Gerade im ε_1 - (ε_1/q) -Raum.

3.3 Elastisch-Plastische Modelle

3.3.1 Modellkomponenten

In der klassischen Plastizitätstheorie wird *plastisches Fließen* als ein irreversibler Prozess verstanden, der durch die Materialgeschichte charakterisiert wird. Die *Materialgeschichte* eines Körpers $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ zu einem betrachteten Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ wird dabei definiert als

$$]-\infty, t] \ni \tau \mapsto (\boldsymbol{\sigma}(P, \tau), \boldsymbol{\kappa}(P, \tau)), \quad \text{für alle } P \in \mathcal{B}. \quad (3.3.1)$$

$\boldsymbol{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} \{\kappa_1, \dots, \kappa_a\}$ ist eine Liste von (möglicherweise tensorwertigen) inneren Zustandsvariablen, zumeist bezeichnet als *Verfestigungsparameter* oder *plastische Variablen*. Insbesondere versteht man die Elemente von $\boldsymbol{\kappa}$ als Variablen vom Spannungstyp, wie z.B. die Fließgrenze. Man könnte genauso mit einer Liste innerer Variablen vom Dehnungstyp arbeiten, welche zu den Zustandsvariablen vom Spannungstyp komplementär sind.

Der *Zustand* eines elastisch-plastischen Materials ist definiert durch das Paar

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{T}_2^{\text{sym}} \times \mathcal{K}, \quad (3.3.2)$$

worin $\mathcal{T}_2^{\text{sym}}$ die Menge aller symmetrischen Tensorfelder zweiter Stufe bezeichnet und $\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\kappa} \mid \boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}\}$ die Menge aller Listen plastischer Variablen vom Spannungstyp. Demzufolge kann die Materialgeschichte als die zeitliche Aneinanderreihung aller vergangener Zustände aufgefasst werden.

Die Modelle der *klassischen Elasto-Plastizität* werden dann durch folgende Komponenten beschrieben:

Additive Zerlegung der Dehnungsrate

Die Rate der infinitesimalen Dehnung wird additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad \text{in Komponenten} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (3.3.3)$$

Spannungsantwort

Die Änderung der Spannung wird beschrieben durch ein elastisches Materialmodell von Ratentyp in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^t(\boldsymbol{\sigma}) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (3.3.4)$$

Im einfachsten Fall ist der Steifigkeitstensor gegeben durch den konstanten linearen isotropen Elastizitätstensor (3.2.2) bzw. (3.2.7).

Elastischer Bereich und Festigkeitskriterium

Eine differenzierbare Funktion

$$f : \mathcal{T}_2^{\text{sym}} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.3.5)$$

heißt *Fließfunktion* oder *Festigkeitskriterium* und

$$\mathcal{A}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{T}_2^{\text{sym}} \times \mathcal{K} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0\} \quad (3.3.6)$$

ist die Menge aller *zulässigen Zustände* im Spannungsraum. Ein zulässiger Zustand $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{A}_\sigma$, welcher $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$ erfüllt, gehört zum *elastischen Bereich* oder heißt ein *elastischer Zustand*. Für $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$ liegt der Zustand auf der *Fließfläche* und heißt ein *elasto-plastischer Zustand*. Zustände mit $f > 0$ sind unzulässig.

Fließregel und Verfestigungsregel

Die Evolutionsgleichung für $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ heißt *Fließregel* und diejenige für $\boldsymbol{\kappa}$ heißt *Verfestigungsregel*. Diese sind jeweils gegeben durch Differentialgleichungen in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} \stackrel{\text{def}}{=} -\gamma \mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}). \quad (3.3.7)$$

Hierbei sind \mathbf{m} und \mathbf{l} vorgegebene Funktionen, und $\gamma \geq 0$ heißt *Konsistenzparameter* oder *plastischer Multiplikator*.

Die Fließregel legt den Betrag und die Richtung der plastischen Dehnungszuwächse fest. Die Fließregel heißt *assoziiert*, falls das plastische Dehnungsinkrement $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ bei festem $\boldsymbol{\kappa}$ senkrecht zur Fließfläche $f = 0$ am Spannungspunkt $\boldsymbol{\sigma}$ gerichtet ist, also

$$\mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\kappa}}. \quad (3.3.8)$$

Die rechte Seite ist hierbei als Fréchet-Ableitung im Sinne von (2.2.104) aufzufassen.

Im Gegensatz dazu wird bei einer *nicht-assoziierten* Fließregel das plastische Dehnungsinkrement aus einem sog. *plastischen Potential* $g \neq f$ gewonnen:

$$\mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\kappa}}, \quad \text{mit} \quad g : \mathcal{T}_2^{\text{sym}} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.3.9)$$

Es ist auch möglich, \mathbf{m} direkt zu definieren und nicht als Ableitung einer Funktion f oder g .

Eine wichtige Beobachtung ist, dass bei einer durch (3.3.9)₁ gegebenen Fließregel die Hauptachsenrichtungen der plastischen Dehnungsrate und der Spannung übereinstimmen. Diese erzwungene *Koaxialität* wird in der Literatur kontrovers diskutiert, weil das plastische Verhalten von Sand und anderen granularen Materialien durchaus davon abweichen kann.

Die Verfestigungsregel legt fest, wie sich der elastische Bereich bzw. die Fließfläche mit der Belastung verändert. In diesem Zusammenhang repräsentiert κ bei üblichen *isotropen* Verfestigungsregeln den aktuellen Radius der Fließfläche, bei *kinematischen* Verfestigungsregeln hingegen die Achse bzw. den Mittelpunkt der Fließfläche (sog. *back stress*).

Belastung/Entlastung und Konsistenzbedingung

Es wird angenommen, dass der plastische Multiplikator γ die *Bedingungen für Be- und Entlastung* bzw. *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen*

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \leq 0, \quad \text{und} \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (3.3.10)$$

ebenso wie die *Konsistenzbedingung*

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (3.3.11)$$

erfüllt, mit

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\kappa} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \kappa} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\kappa} \\ &= D_{\boldsymbol{\sigma}} f : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + D_{\kappa} f : \dot{\kappa}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Hierin sind $D_{\boldsymbol{\sigma}} f$ und $D_{\kappa} f$ die partiellen Fréchet-Ableitungen von f gemäß (2.2.104).

Durch die genannten Bedingungen sind vier verschiedene Situationen denkbar (Zustände mit $f > 0$ sind definitionsgemäß unzulässig):

$$\begin{aligned} f < 0 &\implies \gamma = 0 \quad \text{elastisches Verhalten} \\ f = 0 &\begin{cases} \dot{f} < 0 &\implies \gamma = 0 \quad \text{elastische Entlastung} \\ \dot{f} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = 0 &\text{neutrale Belastung} \\ \dot{f} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma > 0 &\text{plastische Belastung} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

3.3.2 Fließ- und Bruchkriterien

Wir hatten im Abschn. 3.1.3 den Begriff der Vergleichsspannung eingeführt, mit deren Hilfe Spannungszustände infolge mehrachsiger Beanspruchungen durch skalare Größen ausgedrückt werden können. Vergleichsspannungen bilden die Grundlage von Fließ- und Bruchkriterien.

Die *Fließgrenze* oder *Fließspannung* für einen gegebenen Materialzustand bezeichnet dabei diejenige Vergleichsspannung, bei deren Erreichen (weitere) plastische Verformungen auftreten. Die *Bruchgrenze* oder *Bruchspannung* ist hingegen der Maximalwert der Vergleichsspannung, der für eine bestimmte Materialgeschichte erreicht werden kann. Die Bruchgrenze gibt an, ab welcher Belastung ein Material versagt; sie ist daher ein Maß für die Festigkeit des Materials. Bei ideal plastischem Materialverhalten, d.h. ohne Ver- und Entfestigung, sind Fließ- und Bruchgrenze identisch. Gemäß den vorangegangenen Definitionen der klassischen Elasto-Plastizität ist das Materialverhalten unterhalb der Fließ- bzw. Bruchgrenze elastisch.

Fließkriterium nach Tresca

Das *Fließkriterium nach Tresca* ist eines der ältesten Fließkriterien und besagt, dass plastische Verformungen auftreten, sobald die maximale Schubspannung τ_{\max} einen kritischen Wert κ erreicht:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{\max} - \kappa = 0, \quad (3.3.14)$$

mit

$$\tau_{\max} = \tau_{\max}(\boldsymbol{\sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right). \quad (3.3.15)$$

Die im letzten Abschnitt eingeführte Liste der Zustandsvariablen $\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_1, \dots, \kappa_a\}$ besteht also aus nur aus einem einzigen Element, nämlich κ . Als kritischer Wert wird die *Fließgrenze bei reiner Scherung* definiert, d.h. $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \tau^y$. Diese wird bei Metallen z.B. aus der Fließspannung σ^y im einaxialen Zugversuch bestimmt ($\sigma_1 = \sigma^y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), bei undrännierten bindigen Böden entspricht der kritische Wert der *undrännierten Kohäsion* c_u , also

$$\kappa = \frac{\sigma^y}{2} \text{ (Metalle)} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = c_u \text{ (undrännierter bindiger Boden)}. \quad (3.3.16)$$

Mit den im Abschn. 3.1.3 definierten Spannungsinvarianten kann das Fließkriterium nach Tresca auch in der verallgemeinerten Form

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \tau^y) \stackrel{\text{def}}{=} q \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sqrt{3} \tau^y = 0, \quad \text{mit } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi, \quad (3.3.17)$$

geschrieben werden, mit $\kappa = \tau^y$. Die durch $f(\boldsymbol{\sigma}, \tau^y) = f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$ definierte Tresca-Fließfläche im Spannungsraum beschreibt in jeder Deviatorebene ein regelmäßiges Sechseck mit konstanter Kantenlänge $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma^y = 2\sqrt{\frac{2}{3}} c_u$; siehe auch Abschn. 3.1.3. Das Fließkriterium nach Tresca ist also unabhängig von der mittleren Spannung bzw. von I_1 oder ξ .

Fließkriterium nach von Mises

Das *Fließkriterium nach von Mises* erfasst im Gegensatz zum Fließkriterium nach Tresca auch den Einfluss der derjenigen Hauptspannung, deren Wert zwischen der

minimalen und maximalen Hauptspannung liegt. Plastische Verformungen treten auf, wenn die mittlere Schubspannung einen kritischen Wert κ erreicht:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \stackrel{\text{def}}{=} q - \kappa = 0. \quad (3.3.18)$$

Hierin ist q die durch definierte von-Mises-Spannung. Die durch $f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$ definierte von-Mises-Fließfläche im Spannungsraum beschreibt in jeder Deviatorebene einen Kreis.

Wir können nun verlangen, dass die von-Mises-Fließfläche in die Tresca-Fließfläche eingeschrieben ist. In diesem Fall stimmen beide Fließkriterien für reine Scherung ($\theta = \pi/6$) überein und (3.3.17) liefert $\kappa = \sqrt{3}\tau^y$. Die Größe τ^y ist wiederum die Fließgrenze bei reiner Scherung. Soll der kritische Wert κ jedoch aus der Fließgrenze σ^y bei einaxialem Zug bestimmt werden, so erhalten wir im Gegensatz zu (3.3.16) beim Fließkriterium nach Tresca nun die Beziehungen

$$\kappa = \sigma^y \text{ (Metalle)} \quad \text{bzw.} \quad \kappa = \sqrt{3}c_u \text{ (undrännierter bindiger Boden)}. \quad (3.3.19)$$

Werden stattdessen die beiden Fließkriterien so definiert, dass sie bei einaxialem Zug übereinstimmen, so gilt für die Fließgrenzen bei reiner Scherung

$$\frac{\tau^y(\text{von Mises})}{\tau^y(\text{Tresca})} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15, \quad (3.3.20)$$

und die von-Mises-Fließfläche ist in der Deviatorebene ein Umkreis der Tresca-Fließfläche.

Bruchkriterium nach Mohr-Coulomb

Das mechanische Verhalten von Böden (mit wenigen Ausnahmen), granularen und weiteren Materialien wie z.B. Beton ist abhängig von der mittleren (effektiven) Spannung. Der Grund hierfür liegt in ihrem strukturellen Aufbau. Nichtbindige Böden und granulare Materialien bestehen aus Körnern, deren Kontaktkräfte vor allem durch Druck und Reibung bestimmt sind. Bei bindigen Böden kommen Kontaktkräfte aufgrund von Oberflächeneffekten (Kohäsion) hinzu.

Beim *Bruchkriterium nach Mohr-Coulomb* ist die Schubspannung im Bruchzustand, τ^f , eine Funktion der *Kohäsion* c , dem *inneren Reibungswinkel* $\phi \geq 0$ und der Normalspannung σ (negativ bei Kompression):

$$\tau^f \stackrel{\text{def}}{=} c - \sigma \tan \phi. \quad (3.3.21)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von Bruch anstatt von Fließen, weil mit dem Kriterium gerade der Spannungszustand beim Materialversagen abgebildet werden soll. Der innere Reibungswinkel steht nicht ausschließlich im Zusammenhang mit der Korn-zu-Korn Reibung auf der Mikroskala, sondern resultiert auch aus der Anordnung der Körner und der Kornform (Verzahnungseffekte).

Gl. (3.3.21) beschreibt eine Gerade $\tau^f(\sigma)$ im σ - τ -Raum, mit $\tau^f(0) = c$. Diese Gerade tangiert in dem Raum *Mohr'sche Spannungskreise*, die bei σ_1 und σ_3 die σ -Achse schneiden, wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gemäß der Konvention (3.1.30). Aus trigonometrischen Beziehungen erhält man dann die Darstellungen

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \quad \text{und} \quad \tau^f = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi. \quad (3.3.22)$$

Einsetzen in (3.3.21) liefert

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right) \tan \phi. \quad (3.3.23)$$

Durch Verallgemeinerung erhält man daraus das Bruchkriterium nach Mohr-Coulomb für beliebige mehrachsige Beanspruchungen:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, c, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} q \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) + \frac{q}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) \sin \phi - \sqrt{3} p \sin \phi - \sqrt{3} c \cos \phi = 0, \quad (3.3.24)$$

mit $0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi$. Für $\phi = 0$ und $c = \tau^y$ folgt das Kriterium nach Tresca als Spezialfall.

Die durch (3.3.24) definierte Bruchfläche im Spannungsraum beschreibt eine unregelmäßige hexagonale Pyramide. Jede Deviatorebene stellt ein unregelmäßiges Sechseck dar, welches symmetrisch bezüglich des Lode-Winkels ist.

Bruchkriterium nach Drucker-Prager

Ebenso wie man das Bruchkriterium nach Mohr-Coulomb als Verallgemeinerung des Kriteriums nach Tresca auffassen kann, erhält man das *Bruchkriterium nach Drucker-Prager* durch Erweiterung des Kriteriums (3.3.18) nach von Mises um eine lineare Funktion der mittleren effektiven Spannung:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \stackrel{\text{def}}{=} q - \alpha p - \kappa = 0. \quad (3.3.25)$$

α und κ sind Parameter, die die Festigkeit des Materials charakterisieren. Für $\alpha = 0$ folgt aus (3.3.25) gerade (3.3.18).

Im Spannungsraum beschreibt (3.3.25) einen Konus mit kreisförmiger Deviatorebene. Man kann nun α und κ so kalibrieren, dass dieser Konus die Mohr-Coulomb-Bruchfläche (3.3.24) umschreibt oder in diese eingeschrieben ist. Im erstgenannten Fall stimmen die Funktionswerte bei triaxialer Kompression ($\theta = \pi/3$) überein und man erhält

$$\alpha = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi}. \quad (3.3.26)$$

Man beachte, dass sich daraus für $\phi = 0$ und $c = c_u > 0$ (undrännierter bindiger Boden) gerade $\alpha = 0$ und $\kappa = 2c_u$ ergeben. Die Werte der undrännierten Kohäsion für das Drucker-Prager und das von Mises Kriterium stehen also in diesem Fall im Verhältnis

$$\frac{c_u(\text{Drucker-Prager})}{c_u(\text{von Mises})} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87. \quad (3.3.27)$$

3.3.3 Herleitung des Steifigkeitstensors

Hat man ein Festigkeitskriterium (Fließ- oder Bruchkriterium) und ggf. ein davon abweichendes plastisches Potential festgelegt, so lässt sich mit den Modellkomponenten aus Abschn. 3.3.1 eine zugehörige $\dot{\boldsymbol{\sigma}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ -Beziehung in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.3.28)$$

herleiten. Der *elasto-plastische Steifigkeitstensor* \mathbf{C}^{ep} stellt die Tangentensteifigkeit an der Stelle $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ für einen Materialzustand $(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\kappa}_0)$ dar, d.h.

$$\mathbf{C}^{\text{ep}}(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\kappa}_0) = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\kappa}_0} . \quad (3.3.29)$$

Die rechte Seite ist die Fréchet-Ableitung einer entsprechenden Spannungsfunktion im Sinne von (2.2.104).

Je nach Festigkeitskriterium, Fließ- und Verfestigungsregeln ist die Herleitung der Tangentensteifigkeit mehr oder weniger komplex. Als ein einfaches Beispiel wird hier ein elasto-plastisches Materialmodell mit Fließkriterium nach von Mises, assoziierter Fließregel und einer linearen isotropen Verfestigungsregel betrachtet. Dabei handelt es sich um ein Standardmodell für Metalle, und man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *von-Mises-Plastizität* oder *J_2 -Plastizität mit isotroper Verfestigung*.

Die wesentlichen Komponenten des Materialmodells sind das Fließkriterium (3.3.18), welches wir hier durch

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y) \stackrel{\text{def}}{=} q - \sigma^y = 0 \quad (3.3.30)$$

ausdrücken, sowie eine lineare Beziehung für die aktuelle Fließgrenze:

$$\sigma^y(\varepsilon^p) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{y0} + E^p \varepsilon^p . \quad (3.3.31)$$

Die *Streckgrenze* bzw. *Anfangsfließgrenze* σ^{y0} und der sog. *plastische Modul* E^p sind Materialparameter, zusätzlich zu den Materialparametern für die elastische Steifigkeit. Die *äquivalente plastische Dehnung* ε^p ist eine Zustandsvariable vom Dehnungstyp und wird als Funktion der plastischen Dehnungsrate $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ aufgefasst. Gl. (3.3.31) beschreibt demnach eine Gerade im ε^p - σ -Raum.

Die Berücksichtigung von (3.3.31) führt zu einem bilinearen elasto-plastischen Materialverhalten mit isotropem Verfestigungsmechanismus. Bilinear bedeutet in diesem Kontext, dass ein Stab im eindimensionalen Zugversuch sich zunächst linear elastisch verhält, mit einem Elastizitätsmodul E . Nach Erreichen der Streckgrenze σ^{y0} tritt plastisches Fließen auf, und das Material verfestigt sich linear gemäß der Vorschrift (3.3.31). Die Gesamtdehnung ergibt sich aus

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E^p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E^t} . \quad (3.3.32)$$

Der *elasto-plastische Tangentenmodul* E^t folgt daraus zu

$$E^t = \frac{E E^p}{E + E^p} . \quad (3.3.33)$$

Die Änderung der Spannung sei nun in Anlehnung an (3.3.4) gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad (3.3.34)$$

worin \mathbf{C}^e den konstanten isotropen Elastizitätstensor aus (3.2.2) bzw. (3.2.7) darstellt. Darüber hinaus werde plastischen Fließen durch eine assoziierte Fließregel abgebildet. Mit den Definitionen (3.3.7)₁, (3.3.8), (3.3.2) sowie den üblichen Regeln für Differentiation erhält man zunächst

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\sigma^y} = \gamma \frac{\partial q(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\partial (3J_2(\boldsymbol{\sigma}))^{1/2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{3}{2\sqrt{3}J_2} \frac{\partial J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \gamma \frac{3}{2q} \frac{\partial J_2(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} : \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Die (Fréchet-)Ableitung der zweiten Hauptinvariante des Spannungsdeviators nach dem Spannungsdeviator berechnen wir komponentenweise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2(s_{ij})}{\partial s_{kl}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s_{kl}} (s_{ij}s_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_{ij}}{\partial s_{kl}} s_{ji} + s_{ij} \frac{\partial s_{ji}}{\partial s_{kl}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl}s_{ji} + s_{ij}\delta_{jk}\delta_{il}) = s_{kl}. \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Die Ableitung des Deviators eines Tensors zweiter Stufe nach dem Tensor ist gerade der ist der Deviator-Einheitstensor vierter Stufe definiert durch (2.2.84), siehe (2.2.112). Daraus folgt für die Fließregel

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{3}{2q} \mathbf{s} : \mathbf{1}_{\text{dev}} = \gamma \frac{3}{2q} \mathbf{s} = \gamma \frac{3\|\mathbf{s}\|}{2q} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}, \quad (3.3.37)$$

mit

$$\|\mathbf{n}\| = 1, \quad \text{sp } \mathbf{n} = \frac{\text{sp } \mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = 0 \quad \text{und daher} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}}^p. \quad (3.3.38)$$

Plastisches Fließen ist also rein deviatorisch, d.h. eine irreversible Volumenänderung findet nicht statt.

Unter Anwendung dieser Eigenschaft zusammen mit (3.3.37) und (3.1.39) erhalten wir aus (3.3.31) eine Evolutionsgleichung für die Fließgrenze:

$$\dot{\sigma}^y = E^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv E^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_q^p = E^p \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| = \gamma E^p \quad \text{bzw.} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma. \quad (3.3.39)$$

Diese entspricht gemäß Definition (3.3.7) einer speziellen Verfestigungsregel und beschreibt die Veränderung des Radius der von-Mises-Fließfläche.

Mit den bis hierhin durchgeführten Herleitungen ergibt sich für die Konsistenzbedingung (3.3.12) während plastischer Belastung, $\dot{f} = 0$, die spezielle Form

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\sigma^y} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y)}{\partial \sigma^y} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\sigma}^y = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} : \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \gamma E^p \\ &= 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}} - \gamma 3G + \gamma E^p = 0. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass \mathbf{n} deviatorisch und normiert ist, denn es gelten

$$\mathbf{n} : \mathbf{C}^e = K \mathbf{n} : \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \mathbf{n} : \mathbf{1}_{\text{dev}} = K(\text{sp } \mathbf{n})\mathbf{I} + 2G \mathbf{n} = 2G \mathbf{n} \quad (3.3.41)$$

und $\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}}$. Der plastischer Multiplikator errechnet sich also aus

$$\gamma = \frac{2G}{3G + E^p} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}} \quad (3.3.42)$$

und vervollständigt das Materialmodell.

Wir können nun die Fließregel (3.3.37) mit dem plastischen Multiplikator (3.3.42) in die Spannungsantwort (3.3.34) einsetzen und erhalten schließlich die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^e : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3G \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}}}{3G + E^p} \mathbf{n} \right) = \left(\mathbf{C}^e - \frac{3G}{3G + E^p} \mathbf{C}^e : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \left(\mathbf{C}^e - \frac{6G^2}{3G + E^p} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

Wir fassen zusammen, dass der elasto-plastische Steifigkeitstensor für die von-Mises-Plastizität mit linearer isotroper Verfestigung gegeben ist durch

$$\mathbf{C}^{\text{ep}}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^e - \frac{6G^2}{3G + E^p} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (3.3.44)$$

bei plastischer Belastung, und durch $\mathbf{C}^{\text{ep}}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^e$ bei elastischer Be- und Entlastung sowie bei neutraler Belastung. Die Unterscheidung dieser Belastungsmodi erfolgt auf der Grundlage von (3.3.13) und (3.3.30) zusammen mit (3.3.31). Der Steifigkeitstensor hängt daher nur indirekt von σ^y ab

Kapitel 4

Grundlagen der Finite Elemente Methode

4.1 Schwache Form des Anfangsrandwertproblems

4.1.1 Mechanisches Anfangsrandwertproblem

Wie bereits festgelegt, betrachten wir ausschließlich mechanische Problemstellungen mit kleinen Verformungen eines materiellen Körpers $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ über ein Zeitintervall $[0, T] \in \mathbb{R}$. Die Problemstellung soll dem Massenerhaltungssatz (2.4.10) genügen und durch die Impulsbilanz (2.4.15), also

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{o} , \quad (4.1.1)$$

beschrieben werden. Darüber hinaus sei an jedem Partikel $P \in \mathcal{B}$ und für alle $t \in [0, T]$ der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ durch ein Materialmodell mit dem infinitesimalen Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ verknüpft. Das Materialmodell ist also eine Funktion der Bewegung des materiellen Körpers, so dass (4.1.1) ein System von *Bewegungsgleichungen* bildet.

Die Problemstellung ist so noch nicht lösbar, weil (4.1.1) eine partielle Differentialgleichung ist, in der einerseits die zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} nach der Zeit und andererseits die erste Ableitung des Spannungsfeldes nach dem Ort auftaucht. Es müssen daher zusätzlich Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben und erfüllt werden.

Wir wählen als Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 , \quad (4.1.2)$$

als Verschiebungsrandbedingung (allg. *Dirichlet-Randbedingung*)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial_u \mathcal{B} \quad (4.1.3)$$

und als Spannungsrandbedingung (allg. *Neumann-Randbedingung*)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial_\sigma \mathcal{B} \quad (4.1.4)$$

für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Für die so definierten Randabschnitte $\partial_u \mathcal{B}, \partial_\sigma \mathcal{B} \subset \partial \mathcal{B}$ gelte außerdem $\partial_u \mathcal{B} \cup \partial_\sigma \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}$ und $\partial_u \mathcal{B} \cap \partial_\sigma \mathcal{B} = \emptyset$. Mit anderen Worten ist auf dem Rand des materiellen Körpers entweder eine Spannung oder eine Verschiebung vorgegeben.

Wir nennen eine Problemstellung, welche durch die Impulsbilanz (4.1.1) zusammen mit der Anfangsbedingung (4.1.2) und den Randbedingungen (4.1.3) und (4.1.4) vollständig beschrieben wird, ein *mechanisches Anfangsrandwertproblem*. Weil hierbei die lokale Impulsbilanz, also eine Differentialgleichung verwendet wird, spricht man speziell von der *Starken Form des mechanischen Anfangsrandwertproblems*.

Sofern die beteiligten Felder zeitunabhängig sind, spricht man von einem *Randwertproblem* (s. Kap. 1). In der Geotechnik trifft dies vor allem auf statische oder quasi-statische Probleme in nichtbindigen Böden zu. Für viele praktische Fragestellungen spielt jedoch die zeitliche Dimension eine wichtige Rolle (z.B. bei Konsolidierung oder dynamischer Anregung).

4.1.2 Schwache Formulierung (virtuelle Arbeit)

Es genügt uns, das mechanische Anfangsrandwertproblem näherungsweise zu lösen. Hierfür verwenden wir einen grundlegenden mathematischen Zusammenhang, der als *Fundamentallemma der Variationsrechnung* bekannt ist: sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf diesem Intervall und $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine andere, ebenfalls stetige Funktion welche $h(a) = 0$ und $h(b) = 0$ erfüllt. Falls dann

$$\int_a^b f(s) h(s) ds = 0 \quad (4.1.5)$$

gilt, dann gilt zugleich $f(s) = 0$ für alle $s \in [a, b]$. Man nennt $\int_a^b f(s) h(s) ds = 0$ die *Schwache Form* der Gleichung $f(s) = 0$ und Letztere ihre *Starke Form*.

Bezogen auf das mechanische Anfangsrandwertproblem entspricht $f(s) = 0$ der Impulsbilanz (4.1.1). Anstelle von $h(s)$ definieren wir das Feld $\delta \mathbf{u}$ als ein Verschiebungsfeld, für welches $\delta \mathbf{u} = \mathbf{o}$ auf dem Randabschnitt $\partial_u \mathcal{B}$ gilt. Ein solches Feld heißt eine *zulässige Variation der Verschiebung \mathbf{u}* bzw. eine *virtuelle Verschiebung*, und für die Gesamtheit dieser Vektorfelder schreiben wir \mathcal{Z} . Präzise schreibt man

$$\mathcal{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \delta \mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{V} \mid \delta \mathbf{u} = \mathbf{o} \text{ auf } \partial_u \mathcal{B} \} . \quad (4.1.6)$$

Jeder Term in (4.1.1) wird sodann mit $\delta \mathbf{u}$ skalar multipliziert bzw. einfach überschoben und über \mathcal{B} integriert. Man erhält dadurch zunächst

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) dv = 0 . \quad (4.1.7)$$

Für den ersten Integranden liefert die Produktregel für Differentiation unter Berücksichtigung von (2.2.96) die Beziehung

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} = \text{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta \mathbf{u}) . \quad (4.1.8)$$

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors gilt für den zweiten Term auf der rechten Seite

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{mit} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\nabla(\delta \mathbf{u}) + (\nabla(\delta \mathbf{u}))^T \right), \quad (4.1.9)$$

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ entspricht dabei einer *virtuellen Dehnung*. Einsetzen in (4.1.7) ergibt

$$\int_{\mathcal{B}} (\text{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}) \, dv + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = 0. \quad (4.1.10)$$

Mit dem Integralsatz von Gauß (2.4.5), dem Cauchy-Theorem (2.4.14) sowie der Spannungsrandbedingung (4.1.4) folgt für den ersten Integralausdruck

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \text{div}(\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, dv &= \int_{\partial \mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\partial \mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, da = \int_{\partial_{\sigma} \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da + \int_{\partial_u \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Der letzte Term ist Null, weil die virtuelle Verschiebung auf dem Randabschnitt $\partial_u \mathcal{B}$ definitionsgemäß verschwindet. Durch Substitution in (4.1.10) erhält man schließlich die *Schwache Form der Impulsbilanz*

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv - \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\partial_{\sigma} \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = 0. \quad (4.1.12)$$

Diese repräsentiert eine virtuelle Arbeit am Körper \mathcal{B} und ist nichts anderes als die kontinuumsmechanische Version des aus der Statik bekannten *Prinzips der virtuellen Verschiebungen*, wobei der Trägheitsterm $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ über das *d'Alembertsche Prinzip* berücksichtigt wurde.

Jeder Term in (4.1.12) hat eine konkrete physikalische Bedeutung, und zwar ist

$$W^{\text{in}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv \quad (4.1.13)$$

die *virtuelle Arbeit der inneren Kräfte* (in wie „intern“),

$$W^{\text{ex}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial_{\sigma} \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da \quad (4.1.14)$$

die *virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte* (ex wie „extern“) und

$$W^{\text{ki}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \quad (4.1.15)$$

die *virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte* (ki wie „kinetisch“). Es gilt dann

$$W = W^{\text{in}} - W^{\text{ex}} + W^{\text{ki}} = 0, \quad \text{für alle } \delta \mathbf{u} \in \mathcal{Z}. \quad (4.1.16)$$

Die schwache Form der Impulsbilanz (4.1.12) bzw. (4.1.16) zusammen mit der Anfangsbedingung (4.1.2) und den Randbedingungen (4.1.3) und (4.1.4) heißt die *Schwache Form des mechanischen Anfangsrandwertproblems*.

4.2 Räumliche Diskretisierung

4.2.1 Matrixschreibweise

Die approximative Lösung von Randwert- und Anfangsrandwertproblemen mit Hilfe der Finite Elemente Methode (FEM) erfordert deren *räumliche Diskretisierung*. Bei zeitabhängigen Problemstellungen, d.h. Anfangsrandwertproblemen, ist außerdem eine *zeitliche Diskretisierung* erforderlich. Diese wird später behandelt. Das Elementnetz spiegelt die räumliche Diskretisierung wider, während die zeitliche Diskretisierung den Verlauf einer gesuchten Größen an einzelnen, d.h. diskreten Zeitpunkten annähert.

Für die Diskretisierung müssen die relevanten kontinuumsmechanischen Gleichungen und Zusammenhänge in eine für den Rechner verarbeitbare Form gebracht werden. Insbesondere werden Vektoren und Tensoren in geeignete Matrizen überführt. Wir beschäftigen uns zunächst mit vollständig dreidimensionalen Problemstellungen und widmen uns erst später den ebenen und axialsymmetrischen Sonderfällen.

Gegenstand der Betrachtung ist der Euklidische Standardraum $(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit dem globalen kartesischen Bezugssystem $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, wobei die Vektoren \mathbf{e}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, der Standardbasis durch (2.2.16) definiert sind. Ein Partikel des materiellen Körpers $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ wird mit der Spaltenmatrix seiner kartesischen Koordinaten in diesem Bezugssystem identifiziert:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.2.1)$$

Die infinitesimalen Volumen- und Flächenelemente besitzen jeweils die Darstellungen

$$dv = dx \, dy \, dz \quad \text{und} \quad da = dx \, dy. \quad (4.2.2)$$

Bezüglich der Standardbasis kann der Spannungstensor dargestellt werden als

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

und der infinitesimale Dehnungstensor als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Aufgrund ihrer Symmetrie genügt es, von den jeweils neun Komponenten nur die sechs unabhängigen in Spaltenmatrizen zu speichern. Gemäß der im FE-Programmsystem ANSYS[®] verwendeten Notation, welche eine Modifikation der sogenannten *Voigtschen Notation* ist, definieren wir

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})^T \quad (4.2.5)$$

sowie

$$\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13})^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})^T . \quad (4.2.6)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang vom *Spannungsvektor* und *Dehnungsvektor*.

Mit den oben vereinbarten Konventionen und der tensoriellen Darstellung $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ bzw. $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ eines allgemeinen linearen Materialmodells ergibt sich die Matrixdarstellung des Steifigkeitstensors zu

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1213} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2313} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1323} & C_{1313} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{xxxx} & C_{xyxy} & C_{xxzz} & C_{xxxy} & C_{xxyz} & C_{xxxz} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyzz} & C_{yyxy} & C_{yyyz} & C_{yyxz} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzxy} & C_{zzyz} & C_{zzxz} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyxy} & C_{xxyz} & C_{xyxz} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzzz} & C_{yzxy} & C_{yzyz} & C_{yzxz} \\ C_{zxxx} & C_{xzyy} & C_{xzzz} & C_{xzxy} & C_{xzyz} & C_{zxzx} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Die Matrixdarstellung des Materialmodells ist dann

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (4.2.8)$$

mit $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ und \mathbf{C} gemäß (4.2.5), (4.2.6) und (4.2.7).

Die Matrixdarstellung der Spannungsrandbedingung (4.1.4) lautet

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \\ \bar{t}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_{xz} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_n^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} . \quad (4.2.9)$$

Hierin ist $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ die Spannung am Rand $\partial_\sigma \mathcal{B}$ und \mathbf{I}_n ist eine Projektion, welche die Komponenten der Einheitsnormalen \mathbf{n} auf demselben Rand beinhaltet.

Eine Druckrandbedingung wird realisiert durch

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (-\bar{p}, -\bar{p}, -\bar{p}, 0, 0, 0)^T = -\bar{p} \mathbf{m} , \quad \text{mit } \mathbf{m} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T . \quad (4.2.10)$$

Die Verschiebungskomponenten im \mathbb{R}^3 sind u_x, u_y, u_z . Basierend auf der Definition (2.3.15) kann der Dehnungsvektor (4.2.6) berechnet werden aus

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L}\mathbf{u}. \quad (4.2.11)$$

Die Matrix \mathbf{L} heißt *Differentialoperator*.

Mit den so definierten Matrixdarstellungen und den üblichen Rechenregeln für Matrizen kann die schwache Form der Impulsbilanz (4.1.12) äquivalent geschrieben werden als

$$W = \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} \, dv - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{g} \, dv - \int_{\partial_{\sigma} \mathcal{B}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} \, da + \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \, dv = 0. \quad (4.2.12)$$

4.2.2 Finite Elemente Approximation

Approximation des Rechengebiets (Finite Elemente Netz)

Im Rahmen der FEM wird der materielle Körper im umgebenden Raum approximiert durch einen überlappungsfreien Zusammenschluss

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}^h \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{e=1}^{n_{\text{el}}} \Omega^e \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.2.13)$$

von n_{el} finiten Elementen $\Omega^e \subset \mathbb{R}^3$. Der hochgestellte Index e wird weggelassen, falls ein beliebiges Element Ω betrachtet wird. Der hochgestellte Index h ist eine charakteristische Elementlänge (z.B. Kantenlänge) und weist auf eine Näherung hin. Der Operator \bigcup ist als eine Anordnungsvorschrift zu verstehen, welcher \mathcal{B}^h ein dreidimensionales Elementnetz mit einer gewissen Konnektivität (Topologie) zuordnet. Der Rand von \mathcal{B} wird im Zuge dessen durch

$$\partial \mathcal{B} \approx \partial \mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{b_{\text{el}}} \bar{\partial} \Omega^e \subset \bigcup_{e=1}^{b_{\text{el}}} \partial \Omega^e \quad (4.2.14)$$

approximiert. Darin bezeichnet b_{el} die Anzahl derjenigen Elemente, bei denen ein Abschnitt $\bar{\partial} \Omega^e \subset \partial \Omega^e$ ihres Randes mit dem Rand $\partial \mathcal{B}$ des Körpers zusammenfällt.

Die Gleichung (4.2.12) muss sowohl für die gesamte Näherung \mathcal{B}^h , als auch für die Teilmenge Ω^e gelten. Wie bei einer Gleichgewichtsaussage ist es nämlich egal, welcher Schnitt betrachtet wird, denn jeder Schnitt muss für sich im Gleichgewicht sein (vgl. Grundaussage der Statik). Im Folgenden behandeln wir die Gleichungen für ein Einzelement. Die Anordnung der Elementgleichungen zu einem globalen Modell und das Einprägen von Randbedingungen werden später erläutert.

Einheitselement

Jedes Element im dreidimensionalen Raum sei ein *konvexes Polyeder* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definiert durch ebene Seitenflächen, Kanten und M Knoten $I \in \{1, \dots, M\}$. Dabei fassen wir jedes Element im umgebenden Raum $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ als eine bestimmte Konfiguration

$$\Omega = \beta(\Omega_{\square}, t) \quad \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.2.15)$$

eines *Einheitselement* $\Omega_{\square} \subset \mathbb{R}^3$ auf. Ein beliebiger Punkt P im Einheitselement wird mit seinem Koordinatenvektor

$$\boldsymbol{\xi}_P \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\xi}(P) = \begin{pmatrix} \xi_1(P) \\ \xi_2(P) \\ \xi_3(P) \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \xi(P) \\ \eta(P) \\ \zeta(P) \end{pmatrix} \in \Omega_{\square} \quad (4.2.16)$$

identifiziert. Die *natürlichen Koordinaten* des Einheitselements, ξ, η, ζ oder kurz ξ_{α} , mit $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, müssen nicht notwendigerweise kartesische Koordinaten sein. Sie haben häufig den Wertebereich $[-1, 1]$ oder $[0, 1]$. In der Konfiguration $\Omega = \beta(\Omega_{\square}, t)$ besetzen die Knoten $I \in \{1, \dots, M\}$ die Plätze mit Koordinatenvektoren $\boldsymbol{x}_I(t) = (x_I(t), y_I(t), z_I(t))^T \in \mathbb{R}^3$.

Isoparametrischer Ansatz

Die Geometrie eines Elements Ω wird nun approximiert durch einen sog. parametrischen *Ansatz*

$$\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}^h(\boldsymbol{\xi}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I=1}^M N_I(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{x}_I(t) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{x}(t), \quad (4.2.17)$$

mit $\boldsymbol{x}_I(t) = \boldsymbol{x}^h(\boldsymbol{\xi}_I, t)$, $\boldsymbol{\xi}_I \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\xi}(I)$ und

$$\boldsymbol{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_M)^T = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_M, y_M, z_M)^T, \quad (4.2.18)$$

$$\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_M) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_M & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_M & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_M \end{pmatrix}. \quad (4.2.19)$$

Die N_I heißen *Ansatzfunktionen* und sind *Interpolationsfunktionen* für jeden lokalen Elementknoten $I \in \{1, \dots, M\}$, welche die Koordinaten von Punkten zwischen den bekannten Knotenkoordinaten interpolieren. Welcher Ansatz und welche Ansatzordnung (linear, quadratisch etc.) sinnvoll sind, hängt von dem betrachteten Problem ab. Die Ansatzfunktionen haben die Eigenschaften

$$N_I(\boldsymbol{\xi}_J) = \delta_{IJ} \quad \text{und} \quad \sum_{I=1}^M N_I(\boldsymbol{\xi}_P) = 1 \quad (4.2.20)$$

für alle $I, J \in \{1, \dots, M\}$ und alle $P \in \Omega_{\square}$, d.h. sie haben den Wert 1 am zugeordneten Knoten und den Wert 0 an allen übrigen Knoten des Elements, und die Summe

der Werte aller Ansatzfunktionen innerhalb oder auf dem Rand des Elements ergibt immer 1.

Neben der Geometrie müssen auch für die primären Unbekannten \mathbf{u} und deren Variation $\delta\mathbf{u}$ Ansätze gemacht werden. Diese Ansätze können im Allgemeinen verschieden sein. Sind die Ansätze für \mathbf{u} und $\delta\mathbf{u}$ jedoch identisch, so bildet die FEM ein *Galerkin-Verfahren*. Werden darüber hinaus auch für $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ sowie für die Zeitableitungen von $\delta\mathbf{u}$ dieselben Ansätze gewählt wie für die Geometrie, so spricht man von einem *isoparametrischen Ansatz*. Die Verwendung eines isoparametrischen Ansatzes zählt zu den Standard-Konzepten der FEM und ist für viele Problemstellungen aus dem Ingenieurwesen geeignet.

Im Folgenden verwenden wir einen isoparametrische Ansatz und definieren daher

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}, t), t) = \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I=1}^M N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I(t) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(t), \quad (4.2.21)$$

mit N_I, \mathbf{N} wie in (4.2.17) und $\mathbf{u}_I \stackrel{\text{def}}{=} (u_{xI}, u_{yI}, u_{zI})^T$, $\mathbf{u}_I(t) = \mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}_I, t)$ sowie

$$\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M)^T = (u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \dots, u_{xM}, u_{yM}, u_{zM})^T. \quad (4.2.22)$$

Gleiches gilt für $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ etc. Man beachte, dass der Ansatz die Orts- und Zeitabhängigkeit des Verschiebungsfeldes multiplikativ aufspaltet in die ausschließlich ortsabhängigen Interpolationsfunktionen und die zeitabhängigen Knotenverschiebungen.

4.2.3 Semi-Diskrete Schwache Form

Für ein einzelnes finites Element Ω definieren wir nun den *Dehnungsoperator* (auch: *B-Matrix*) durch

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{LN} = (\mathbf{LN}_1, \dots, \mathbf{LN}_M) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_M), \quad (4.2.23)$$

mit

$$\mathbf{B}_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial z} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \text{und } I \in \{1, \dots, M\}. \quad (4.2.24)$$

Substitution von (4.2.21) und (4.2.23) in (4.2.12) liefert für Ω dann

$$\begin{aligned} W^h &= \delta\mathbf{u}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dv - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{g} \, dv - \int_{\partial\sigma\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, da + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} \, dv \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

Diese Gleichung soll für alle möglichen virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ gelten, also muss der Klammerausdruck verschwinden. Es folgt daher die *semi-diskrete schwache Form der Impulsbilanz*

$$\mathbf{f}^{\text{in}} - \mathbf{f}^{\text{ex}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{o}, \quad (4.2.26)$$

mit der *Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen* \mathbf{u} , der *Spaltenmatrix der inneren Kräfte*

$$\mathbf{f}^{\text{in}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dv, \quad (4.2.27)$$

der *Spaltenmatrix der äußeren Kräfte*

$$\mathbf{f}^{\text{ex}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}^g + \mathbf{f}^t \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{g} \, dv + \int_{\partial_{\sigma} \Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, da, \quad (4.2.28)$$

bestehend aus der *Spaltenmatrix der Volumenkräfte* \mathbf{f}^g und der *Spaltenmatrix der Oberflächenkräfte* \mathbf{f}^t , sowie mit der *Massenmatrix*

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} \, dv. \quad (4.2.29)$$

4.2.4 Transformationsregeln und numerische Integration

Die Gradienten sowie die Volumen- und Oberflächenintegrale in der schwachen Form der Impulsbilanz (4.2.12) sind ebenso wie die Ableitungen der Ansatzfunktionen in (4.2.24) bezüglich der globalen kartesischen Koordinaten x_i formuliert. Das Arbeiten mit den natürlichen Koordinaten $\xi_{\alpha} \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ des Einheitslements erfordert daher entsprechende Transformationsvorschriften.

Wir hatten in (4.2.15) die Konfigurationsabbildung

$$\beta : \Omega_{\square} \times [0, T] \rightarrow \Omega \quad (4.2.30)$$

eingeführt, die zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ dem Einheitslement Ω_{\square} eine bestimmte Konfiguration $\Omega = \beta(\Omega_{\square}, t) \subset \mathbb{R}^3$ zuordnet. Die *Jacobi-Matrix* bzw. *Funktionalmatrix* \mathbf{F}_{ξ} und die *Jacobi-Determinante* $J_{\xi} = \det \mathbf{F}_{\xi}$ dieser Abbildung stellen die gesuchten Transformationsvorschriften bereit. Basierend auf (4.2.17) sind die Komponenten von \mathbf{F}_{ξ} bezüglich der natürlichen Koordinaten gerade die partiellen Ableitungen

$$(\mathbf{F}_{\xi})_{\alpha i} = \frac{\partial x^i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_{\alpha}} \approx \sum_{I=1}^M x_I^i \frac{\partial N_I}{\partial \xi_{\alpha}}, \quad (4.2.31)$$

so dass

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial x_i} \frac{\partial N_I}{\partial \xi_{\alpha}} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{\xi}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (4.2.32)$$

Es seien nun dv_{\square} die Volumendichte und da_{\square} die Oberflächendichte des Einheitselements Ω_{\square} , dann gelten für eine beliebige Funktion pro Einheitsvolumen $f(\mathbf{x})$ und eine beliebige Funktion pro Einheitsfläche $g(\mathbf{x})$ die Transformationsregeln

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) dv = \int_{\Omega_{\square}} f(\boldsymbol{\xi}, t) J_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, t) dv_{\square}, \quad (4.2.33)$$

$$\int_{\partial\Omega} g(\mathbf{x}) da = \int_{\partial\Omega_{\square}} g(\boldsymbol{\xi}, t) \|J_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{F}_{\boldsymbol{\xi}}^{-T}(\boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})\| da_{\square}, \quad (4.2.34)$$

worin \mathbf{n} die Einheitsnormalen auf dem Rand $\partial\Omega_{\square}$ bezeichnen, $q(\mathbf{x}) \approx q(\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}, t)) = q(\boldsymbol{\xi}, t)$ und $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}, t)) = f(\boldsymbol{\xi}, t)$. Die Zeitabhängigkeit der Funktionen q und f bezüglich natürlicher Koordinaten kommt durch den Ansatz (4.2.17) beziehungsweise durch die Konfigurationsabbildung (4.2.30) zustande.

Gemäß (4.2.33) und (4.2.34) werden die Integrale über ein Element in seiner aktuellen Konfiguration ersetzt durch Integrale über das Einheitselement. Die Integration auf dem Einheitselement erfolgt bezüglich der natürlichen Koordinaten ξ^{α} . Im Allgemeinen wird diese Integration numerisch mittels *Gauss-Quadratur* durchgeführt. Diese approximiert das Integral einer reellen Funktion $f(\xi)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{Q=1}^{n_Q} w_Q f(\xi_Q). \quad (4.2.35)$$

Hierin bezeichnet n_Q die Anzahl der verwendeten *Gausspunkte* oder *Integrationspunkte* Q mit Koordinate ξ_Q , und w_Q ist die Gewichtung des jeweiligen Punkts. Gl. (4.2.35) ist exakt falls $f(\xi)$ ein Polynom der Ordnung $m \leq 2n_Q - 1$ ist.

Für die Gauss-Quadratur z.B. in drei Dimensionen wird (4.2.35) bezüglich des Parameterraums der natürlichen Koordinaten $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ ausgewertet. Unter der Annahme, dass das natürlichen Koordinatensystem kartesisch ist und jede der Koordinaten im Wertebereich $[-1, 1]$ liegt, dann ist $dv_{\square} = d\xi d\eta d\zeta$ und mit (4.2.33) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\square}} f J_{\boldsymbol{\xi}} dv_{\square} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f J_{\boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta \\ &\approx \sum_{Q_1=1}^{n_{Q_1}} \sum_{Q_2=1}^{n_{Q_2}} \sum_{Q_3=1}^{n_{Q_3}} w_{Q_1} w_{Q_2} w_{Q_3} f(\xi_{Q_1}, \eta_{Q_2}, \zeta_{Q_3}) J_{\boldsymbol{\xi}}(\xi_{Q_1}, \eta_{Q_2}, \zeta_{Q_3}). \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Tabellen mit Auflistungen der natürlichen Koordinaten der Gausspunkte und der zugehörigen Gewichtungen für verschiedene Elementtypen findet man in allen Standardwerken zur FEM.

4.2.5 Ebene und rotationssymmetrische Probleme

Allgemeine Bemerkungen

Reale geotechnische oder bodenmechanische Problemstellungen sind immer dreidimensional, und die Spannungs- und Dehnungstensoren besitzen sechs unabhängige Komponenten (drei Normal- und drei Scherkomponenten). Unter bestimmten Umständen

kann diese Anzahl jedoch im Modell reduziert werden, z.B. wenn Verzerrungen vorwiegend in einer Ebene auftreten (*ebene Verzerrungen*; engl. „plane strain“) oder wenn das System *rotationssymmetrisch* (engl. „axisymmetric“) ist.

Näherungsweise ebene Verzerrungen liegen bei Bauwerken wie z.B. einem Tunnel oder einer Baugrube vor, deren Dimension in einer Richtung sehr viel größer ist als in den anderen Richtungen. Die Annahme der Rotationssymmetrie kann z.B. bei Rechenmodellen für Einzelpfähle, Kreisfundamente oder Brunnen sinnvoll sein. Demgegenüber sind *ebene Spannungszustände* (engl. „plane stress“) in der Geotechnik vergleichsweise selten anzutreffen. Sie spielen vor allem bei Scheibentragwerken im Konstruktiven Ingenieurbau eine Rolle.

Ebene Verzerrungszustände in der x - y -Ebene sind dadurch gekennzeichnet, dass räumliche Ableitungen in z -Richtung verschwinden, aber die Normalspannungskomponente in diese Richtung im Allgemeinen ungleich null ist. Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{zz} \neq 0. \quad (4.2.37)$$

Die linke Gleichung ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass alle Feldgrößen als Funktionen unabhängig von der z -Koordinate ausgedrückt werden können. Mit (2.3.15) ergeben sich bei ebenen Verzerrungszuständen drei Dehnungskomponenten ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$) und vier Spannungskomponenten ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}$) ungleich Null. Die Spannungskomponente σ_{zz} folgt aus den übrigen Spannungskomponenten unter Ausnutzung der Bedingung $\varepsilon_{zz} = 0$.

Rotationssymmetrische Zustände lassen sich am besten in den Zylinderkoordinaten $\{r, \theta, z\}$ erläutern, wobei r die radiale Richtung, z die Richtung der Achse (üblicherweise nach oben positiv) und θ den Polarwinkel oder Azimut bezeichnet. Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem gerade so, dass die z -Achsen zusammenfallen und die x -Achse mit der r -Achse bei $\theta = 0$, so erhält man die Transformationsformeln

$$x = r \cos \theta, \quad (4.2.38)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (4.2.39)$$

$$z = z. \quad (4.2.40)$$

Die Volumendichte bzw. das infinitesimale Volumenelement sich dabei aus

$$dv = dx dy dz = r dr d\theta dz. \quad (4.2.41)$$

worin r die Jacobi-Determinante der Transformation $\{r, \theta, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$ darstellt.

Bei rotationssymmetrischen Zuständen verschwinden die räumlichen Ableitungen in θ -Richtung, jedoch sind die Normaldehnungskomponente und die Normalspannungskomponente in diese Richtung im Allgemeinen ungleich null:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \text{und} \quad \sigma_{\theta\theta} \neq 0. \quad (4.2.42)$$

Die infinitesimale *Ringdehnung* oder *Tangentialdehnung* $\varepsilon_{\theta\theta}$ ergibt sich hierbei aus einer algebraischen Gleichung, in welche die Verschiebungskomponente u_r in radialer

Richtung eingeht. Es ergibt sich daher genau eine Dehnungskomponente mehr als bei ebenen Verzerrungszuständen.

Ein Rotationskörper bzw. rotationssymmetrisches Gebiet $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ mit Querschnittsebene $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^2$ besitzt die Darstellung

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^3. \quad (4.2.43)$$

Die Querschnittsebene wird durch die Zylinderkoordinaten $r > 0$ und z beschrieben, und $\theta \in [0, 2\pi]$. Ist nun $f(r, z)$ eine Funktion, die unabhängig von θ ist, so liefert ihr Integral über \mathcal{U}

$$\int_{\mathcal{U}} f \, dv = \int_{\mathcal{U}'} \int_0^{2\pi} f(r, z) r \, dr \, d\theta \, dz = \int_{\mathcal{U}'} f(r, z) 2\pi r \, dr \, dz. \quad (4.2.44)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit vom Polarwinkel θ lassen sich rotationssymmetrische also genauso wie ebene Problemstellungen durch Funktionen von nur zwei Koordinaten beschreiben. Darüber hinaus kann die Darstellung beider Problemtypen vereinheitlicht werden, denn für $r \rightarrow \infty$ folgt $\varepsilon_{\theta\theta} = 0$, d.h. ein ebener Verzerrungszustand.

Vereinheitlichte Matrixschreibweise

Für eine vereinheitlichte Darstellung ebener und rotationssymmetrischer Probleme definieren wir ein pseudo-kartesisches Bezugssystem $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ im Euklidischen Unterraum \mathbb{R}^2 . In Letzterem werde jeder Punkt mit der Spaltenmatrix seiner Koordinaten

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.2.45)$$

identifiziert. Wir setzen dann

$$\begin{aligned} x_1 = x \quad \text{und} \quad x_2 = y & \quad \text{im ebenen Fall,} \\ x_1 = r \quad \text{und} \quad x_2 = z & \quad \text{im rotationssymmetrischen Fall.} \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Volumen- und Oberflächenintegrale werden im ebenen Fall pro Einheitsdicke definiert und im rotationssymmetrischen Fall auf den Gesamtumfang $2\pi r$ bezogen. Wir setzen also

$$\begin{aligned} dv = dx \, dy & \quad \text{im ebenen Fall,} \\ dv = 2\pi r \, dr \, dz & \quad \text{im rotationssymmetrischen Fall,} \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

beziehungsweise

$$dv = (2\pi x_1)^\lambda dx_1 dx_2, \quad \text{mit } \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{im ebenen Fall,} \\ 1 & \text{im rotationssymmetrischen Fall.} \end{cases} \quad (4.2.48)$$

In der bei Finite Elemente Programmen üblichen vereinheitlichten Darstellung ebener und rotationssymmetrischer Probleme besitzen der Spannungs- und der Dehnungsvektor jeweils vier Komponenten:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12})^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12})^T. \quad (4.2.49)$$

Entsprechend dieser Konvention ist die Matrix-Darstellung eines Steifigkeitstensors gegeben durch

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} \end{pmatrix}. \quad (4.2.50)$$

Man erhält den ebenen Fall durch ignorieren der dritten Zeile und Spalte.

Die Spannungsrandbedingung (4.2.9) reduziert sich zu

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.2.51)$$

und (4.2.11) erhält die spezielle Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \lambda \frac{1}{x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}. \quad (4.2.52)$$

Der Faktor λ wurde in (4.2.48) definiert, und u_1, u_2 sind jeweils die infinitesimalen Verschiebungen in x_1 - und x_2 -Richtung.

Für die Finite Elemente Approximation und die semi-diskrete schwache Form der Impulsbilanz ebener und rotationssymmetrischer Probleme gelten die Ausführungen in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.3 sinngemäß, jedoch sind die Ansätze lediglich für zwei Raumrichtungen und zwei Verschiebungskomponenten zu formulieren.

4.3 Zeitliche Diskretisierung

Das mechanische Anfangsrandwertproblem hatten wir in Abschn. 4.1.1 über ein kontinuierliches Zeitintervall $[0, T] \in \mathbb{R}$ definiert. Eine Zerlegung

$$[0, T] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=0}^{n_T-1} [t_n, t_{n+1}] \quad (4.3.1)$$

dieses Zeitintervalls führt auf eine Sequenz ($t_0 = 0, t_1 = t_0 + \Delta t_1, \dots, t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}, \dots, t_{n_T} = T$). Darin bezeichnet

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1} \quad (4.3.2)$$

eine *inkrementelle Zerlegung der Zeit*, und $\Delta t_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} t_{n+1} - t_n$ heißt (*variabler*) *Zeitschritt*. Der Zeitschritt wird häufig als konstant angesetzt, so dass $\Delta t_{n+1} \equiv \Delta t$ und $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ für $t_0 = 0$.

Der Parameter „Zeit“ muss nicht unbedingt eine physikalische Bedeutung besitzen. Bei zeitunabhängigen oder statischen Problemstellungen dient er beispielsweise nur dazu, eine Abfolge von Lastschritten oder Bauzuständen im numerischen Modell darzustellen. Der Zeitpunkt t_n markiert in diesem Fall den Beginn und der Zeitpunkt t_{n+1} das Ende des Lastschritts.

Die Diskretisierung in der Zeit ist für zeit- und pfadunabhängige Randwertprobleme mit der Zerlegung (4.3.1) zusammen mit (4.3.2) abgeschlossen. Handelt es sich jedoch um zeitabhängige, transiente Anfangsrandwertprobleme oder ist das zugrundegelegte Materialverhalten pfadabhängig, z.B. elasto-plastisch, so müssen die zugehörigen Variablen entlang der diskreten Zeitschritte mit geeigneten Verfahren integriert werden. Die Integration elasto-plastischer Materialmodelle wird in Abschn. 5.1.4 und die Lösung transienter Probleme in Abschn. 5.2 näher behandelt.

4.4 Lineare statische Probleme

4.4.1 Elementgleichungssystem

Ohne Massenträgheitsterme reduziert sich die semi-diskrete schwache Form der Impulsbilanz (4.2.26) auf die Gleichgewichtsaussage

$$\mathbf{f}_e^{\text{in}} = \mathbf{f}_e^{\text{ex}} . \quad (4.4.1)$$

Der Index e soll darauf hinweisen, dass die Gleichgewichtsaussage bisher nur für ein Element, nicht jedoch für das Gesamtsystem formuliert wurde. Setzt man bei den inneren Kräften ein lineares Materialmodell ein, so erhält man mit (4.2.27), (4.2.11) und (4.2.23)

$$\mathbf{f}_e^{\text{in}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^{\text{T}} \mathbf{C}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e \, dv = \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_e^{\text{T}} \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e \, dv \right) \mathbf{u}_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e . \quad (4.4.2)$$

Die so definierte Matrix \mathbf{K}_e heißt *Elementsteifigkeitsmatrix*. Man beachte, dass die *Elementknotenverschiebungen* \mathbf{u}_e gemäß (4.2.21) unabhängig vom Ort sind und daher aus dem Integralausdruck herausgezogen werden können. Das entstandene lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e^{\text{ex}} \quad (4.4.3)$$

kann problemlos nach den unbekanntenen Knotenverschiebungen aufgelöst werden.

4.4.2 Zusammenbau des Gesamtgleichungssystems

Die vorangegangenen Abschnitte beschäftigten sich mit den Gleichungen für ein Element. In einem Finite Elemente Netz, formalisiert durch (4.2.13), müssen die Beiträge der Knoten jedes Elements kompatibel sein mit den Beiträgen der Knoten der benachbarten Elemente. Dies wird mathematisch durch *Boolesche Operatoren* sichergestellt.

Wir stellen zunächst fest, dass die Integrale in der schwachen Form der Impulsbilanz über das Gesamtgebiet, (4.2.12), als Summe der Integrale über die Elementgebiete Ω^e , mit $e \in \{1, \dots, n_{el}\}$, geschrieben werden können. Das zu (4.4.3) kompatible globale Finite Elemente Gleichungssystem bzw. *Gesamtgleichungssystem* eines linearen statischen Problems besitzt daher die Form

$$\mathbf{K}_g \mathbf{u}_g = \mathbf{f}_g^{\text{ex}}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_g = \sum_{e=1}^{n_{el}} \tilde{\mathbf{K}}_e \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_g^{\text{ex}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \tilde{\mathbf{f}}_e^{\text{ex}}. \quad (4.4.4)$$

Der Index g bezieht sich auf globale Größen. Die Dimension der Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_g und $\tilde{\mathbf{K}}_e$ ist $n_{eq} \times n_{eq}$, und $n_{eq} \times 1$ ist die Dimension der Spaltenmatrizen der äußeren Lasten \mathbf{f}_g^{ex} and $\tilde{\mathbf{f}}_e^{\text{ex}}$, wobei n_{eq} die Anzahl der Gleichungen bezeichnet.

Die maximale Anzahl von Gleichungen ist die maximale Anzahl von Freiheitsgraden des Gesamtsystems. Letztere ist gegeben durch die Anzahl der Knotenpunkte im Netz n_{np} multipliziert mit der Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten n_{dof} . Allerdings sind nicht alle davon aktiv (d.h. unbekannt). Beispielsweise sind Freiheitsgrade an Knoten inaktiv, für die Randbedingungen gesetzt sind. Daher können die zugeordneten Gleichungen dieser Freiheitsgrade aus dem Gesamtsystem eliminiert werden:

$$n_{eq} = n_{np} n_{dof} - (\text{inaktive Freiheitsgrade}). \quad (4.4.5)$$

Demgegenüber beträgt die maximale Anzahl der Elementgleichungen $n_{ee} = n_{dof} M$, worin M die Anzahl der Elementknoten ist.

Die Beiträge $\tilde{\mathbf{K}}_e$ und $\tilde{\mathbf{f}}_e^{\text{ex}}$ beinhalten dieselben Informationen wie die zugehörigen Elementmatrizen \mathbf{K}_e und \mathbf{f}_e^{ex} in (4.4.3). Der Unterschied besteht darin, dass Erstere bezüglich der globalen Anordnung der n_{eq} Systemgleichungen definiert sind, wohingegen sich Letztere auf die lokale Anordnung n_{ee} Elementgleichungen beziehen. Daraus folgt, dass die meisten Einträge von $\tilde{\mathbf{K}}_e$ und $\tilde{\mathbf{f}}_e^{\text{ex}}$ Null sind. Daher werden bei der programmiertechnischen Umsetzung die kompakten Matrizen \mathbf{K}_e und \mathbf{f}_e^{ex} zusammen mit einer Booleschen *Anordnungsmatrix* bzw. *Konnektivitätsmatrix* verwendet. Der i -te Eintrag dieser eindimensionalen Matrix enthält entweder die globale Gleichungsnummer, die der i -ten Zeile des Elementgleichungssystems zugeordnet wird, oder ist Null, falls es sich um einen inaktiven Freiheitsgrad handelt. Alternativ kann eine Anordnungsmatrix \mathbf{A}_e für das Element e auch durch

$$\tilde{\mathbf{K}}_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{A}_e \quad (4.4.6)$$

definiert werden.

Kapitel 5

Methoden für spezielle Probleme

5.1 Nichtlineare statische Probleme

5.1.1 Iteration des Gleichgewichts

Wir betrachten die semi-diskrete schwache Form der Impulsbilanz (4.2.26) für das Gesamtsystem ohne Massenträgheitsterme, also die globale Gleichgewichtsaussage

$$\mathbf{f}^{\text{in}} - \mathbf{f}^{\text{ex}} = \mathbf{o} . \quad (5.1.1)$$

Den Index g lassen wir zur Vereinfachung der Schreibweise weg. Bei linearen Problemen galt $\mathbf{f}^{\text{in}} = \mathbf{K}\mathbf{u}$ aufgrund der linearen Beziehung zwischen der Spannung und der Dehnung im verwendeten Materialmodell (s. Abschn. 4.4). Falls diese Beziehung jedoch nichtlinear ist, wie z.B. bei elasto-plastischen Materialmodellen, so sind die inneren Kräfte $\mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u})$ nichtlineare Funktionen der Knotenverschiebungen. Die Impulsbilanz kann dann dargestellt werden als

$$\Psi(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{\text{ex}} = \mathbf{o} , \quad (5.1.2)$$

wobei die äußeren Kräfte wie schon im linearen Fall verformungsunabhängig angenommen wurden.

Aufgrund der Nichtlinearität der Problemstellung müssen die Nullstellen der Funktion $\Psi(\mathbf{u})$ über ein iteratives Verfahren ermittelt werden. Hierfür definiert man eine Indextmenge $\mathcal{I} \in \mathbb{N}$, mit $i, i+1 \in \mathcal{I}$, und setzt \mathbf{u}^i als gegeben voraus. Das Iterationsschema besitzt dann die Form

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + d\mathbf{u}^i , \quad \text{mit } d\mathbf{u}^i = \alpha^i \mathbf{s}^i . \quad (5.1.3)$$

$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_{\text{eq}}}$ bezeichnet die *Suchrichtung* (engl. *descent direction*) an der Stelle \mathbf{u} , n_{eq} ist die Anzahl der Gleichungen und α heißt *Dämpfungsparmeter* oder *Schrittweite*. Sofern ein Startpunkt $\mathbf{u}^{i=0}$, eine Schrittweite $\alpha^{i=0} > 0$ sowie eine Toleranz $\varepsilon > 0$ festgelegt sind, wird ein *Abbruchkriterium*

$$\|\Psi(\mathbf{u}^i)\| < \varepsilon \|\Psi(\mathbf{u}^{i=0})\| \quad (5.1.4)$$

oder vergleichbare abgefragt. Falls das Abbruchkriterium erfüllt ist, dann bilden die \mathbf{u}^i die Nullstellen von Ψ . Falls das Abbruchkriterium nicht erfüllt ist, dann wird die Suchrichtung \mathbf{s}^i durch ein geeignetes Verfahren bestimmt. Im Anschluss daran wird ein *Liniensuchverfahren* (engl. *line search*) angewandt um die Schrittweite α^i so zu bestimmen, dass

$$\|\Psi(\mathbf{u}^i + \alpha^i \mathbf{s}^i)\| < \|\Psi(\mathbf{u}^i)\|. \quad (5.1.5)$$

Wichtiger Bestandteil der Liniensuche ist eine effektive *Schrittweiten-Regel*, so dass die Nullstellen möglichst zügig ermittelt werden. Die Iteration wird dann mit wiederholter Auswertung des Abbruchkriteriums fortgesetzt, wobei nun jedoch die aktualisierten Verschiebungen $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \alpha^i \mathbf{s}^i$ eingesetzt werden.

Zusammengefasst enthält das Iterationsschema also die folgenden Schritte:

1. Setze $\mathbf{u}^{i=0}$, $\alpha^{i=0} > 0$ und $\varepsilon > 0$.
2. Falls $\|\Psi(\mathbf{u}^i)\| < \varepsilon \|\Psi(\mathbf{u}^{i=0})\|$ ist \mathbf{u}^i die gesuchte Nullstelle, anderenfalls
 - (a) Bestimme die Suchrichtung \mathbf{s}^i .
 - (b) Berechne die Schrittweite α^i .
 - (c) Berechne die neue Lösung $\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \alpha^i \mathbf{s}^i$.
 - (d) Setze $i \leftarrow i + 1$ und wiederhole Schritt 2.

5.1.2 Newton-Raphson-Verfahren und Linearisierung

Das Newton-Raphson-Verfahren gehört zu den Standard-Verfahren der Nullstellensuche in (5.1.2), mit der die primären Lösungsvariablen (hier: Knotenverschiebungen) in der nichtlinearen FEM bestimmt werden. Es basiert auf der Linearisierung der Gleichung $\Psi(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ gemäß (2.2.105). Sei \mathbf{u}^i die bekannte Lösung im i -ten Iterationsschritt, dann liefert die Linearisierung von Ψ an \mathbf{u}^i in Richtung $d\mathbf{u}^i$ die Gleichung

$$\Psi(\mathbf{u}^{i+1}) \approx \text{LIN}_{\mathbf{u}^i}(\Psi; d\mathbf{u}^i) = \Psi(\mathbf{u}^i) + D\Psi(\mathbf{u}^i) d\mathbf{u}^i = \mathbf{o}, \quad (5.1.6)$$

worin

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + d\mathbf{u}^i = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}^{i+1} \quad \text{und} \quad \Delta\mathbf{u}^{i+1} = \sum_{k=0}^i d\mathbf{u}^k. \quad (5.1.7)$$

Sofern die Jacobi-Matrix $D\Psi(\mathbf{u}^i)$ regulär und positiv definit ist, also invertierbar, dann handelt es sich bei der sog. *Newton-Richtung*

$$\mathbf{s}^i = -(D\Psi(\mathbf{u}^i))^{-1} \Psi(\mathbf{u}^i) \quad (5.1.8)$$

tatsächlich um eine Suchrichtung, die in dem zuvor erläuterten Iterationsschema eingesetzt werden kann.

Zur Bestimmung der Jacobi-Matrix nutzen wir die Identität (2.2.108):

$$D\Psi(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} = \dot{\Psi}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{f}}^{\text{in}}(\mathbf{u}). \quad (5.1.9)$$

Mit (4.2.27) und der allgemeinen Raten-Form

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u})) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}(\mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.1.10)$$

eines nichtlinearen Materialmodells erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}^{\text{in}}(\mathbf{u}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) \, dv = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dv \\ &= \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{B} \, dv \right) \dot{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}(\mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} . \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Man bemerke die Analogie zu (4.4.2). Der Unterschied besteht darin, dass die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} bei einem nichtlinearen Materialmodell indirekt von der Verformungsgeschichte abhängt. Der Vergleich mit (5.1.9) führt dann auf

$$D\Psi(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}) . \quad (5.1.12)$$

Einsetzen in (5.1.6) liefert zusammen mit (5.1.2) nach kurzen Umformungen schließlich das linearisierte Gesamtgleichungssystem

$$\mathbf{K}^i d\mathbf{u}^i = \mathbf{r}^i , \quad (5.1.13)$$

mit

$$\mathbf{K}^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}(\mathbf{u}^i) \quad \text{und} \quad \mathbf{r}^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}^{\text{ex}} - \mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u}^i) = -\Psi(\mathbf{u}^i) , \quad (5.1.14)$$

aus dem das Verschiebungsinkrement $d\mathbf{u}^i$ des aktuellen Iterationsschritts berechnet werden kann. Die Spaltenmatrix \mathbf{r}^i heißt *rechte Seite* oder *Vektor der Residuen*.

Das Iterationsschema (5.1.3) mit der Newton-Richtung

$$\mathbf{s}^i = (\mathbf{K}^i)^{-1} \mathbf{r}^i \quad (5.1.15)$$

heißt *vollkommenes* (engl. *full*) *Newton-Raphson-Verfahren*, falls die Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt i neu berechnet wird. In diesem Fall besitzt das Verfahren eine quadratische Konvergenzrate. Um Rechenzeit einzusparen, kann auch ein *modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren* eingesetzt werden, bei dem die Steifigkeitsmatrix z.B. nach einer festgelegten Anzahl von Iterationsschritten aktualisiert wird. Häufig verwenden Finite Elemente Programme auch dann ein modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren, wenn die Steifigkeitsmatrix nicht regulär ist, d.h. wenn $\det \mathbf{K}^i < \delta$ mit einer festgelegten Toleranz $\delta > 0$.

5.1.3 Liniensuchverfahren (Line Search)

Die Schrittweite α^i im Iterationsschema (5.1.3) definiert die sogenannte *Dämpfung* der Iteration. Kombiniert man das Newton-Raphson-Verfahren mit einem Liniensuchverfahren, so erhält man ein *gedämpftes* (engl. *damped*) *Newton-Raphson-Verfahren*. Eine zu große Schrittweite könnte dazu führen, dass die Nullstellensuche über das Ziel hinauschießt und zu keiner Konvergenz führt. Eine sehr kleine Schrittweite verlangsamt hingegen das Verfahren. Die jeweils optimale Schrittweite kann u.U. exakt bestimmt

werden, meistens wendet man jedoch eine Schrittweiten-Regel an. Eine weit verbreitete Schrittweiten-Regel ist die *Armijo-Regel*

$$\|\mathbf{r}^{i+1}\| - \|\mathbf{r}^i\| \leq \chi \frac{1}{2} \|\mathbf{K}^i \mathbf{s}^i\|, \quad (5.1.16)$$

mit $\mathbf{r}^{i+1} = -\Psi(\mathbf{u}^i + \chi \mathbf{s}^i)$ und $\chi > 0$. Die Liniensuche heißt dann auch *Backtracking Line Search*. Dabei wird für gegebene \mathbf{r}^i , \mathbf{K}^i , \mathbf{s}^i und $\chi = 1.0$ die Bedingung (5.1.16) ausgewertet. Falls diese erfüllt ist, so setzt man

$$\alpha^i = \chi \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \alpha^i \mathbf{s}^i. \quad (5.1.17)$$

Falls die Bedingung nicht erfüllt ist, dann wird \mathbf{r}^{i+1} mit der halbierten Schrittweite $\chi_{\text{new}} = \chi_{\text{old}}/2$ erneut abgeschätzt.

5.1.4 Integration elasto-plastischer Materialmodelle

Betrachtung als Anfangswertproblem

Die inneren Kräfte \mathbf{f}^{in} in der semi-diskreten schwachen Form der Impulsbilanz (4.2.26) sind Funktionen der Spannung an den Gausspunkten der finiten Elemente. Sofern das Materialmodell wie in (5.1.10) in Raten-Form gegeben ist, müssen die Spannung und Zustandsvariablen in der Zeit bzw. Belastungsgeschichte integriert werden. Die Wahl eines geeigneten *Integrationsalgorithmus* spielt für die Stabilität und Genauigkeit der Finite Elemente Berechnung eine wichtige Rolle.

Im Folgenden betrachten wir ein inkrementelles, eventuell fiktives Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}] \subset \mathbb{R}$ mit Inkrement $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_{n+1} - t_n$. Mit den Definitionen aus Abschn. 3.3 kann die Evolution der Spannung bei elasto-plastisches Materialverhalten dann durch die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{C}(t, \boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\kappa}(t)) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \quad \text{mit} \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (5.1.18)$$

beschrieben werden; eine analoge Beziehung gelte für $\dot{\boldsymbol{\kappa}}(t)$. Infolgedessen stellt die Integration des Materialmodells über das inkrementelle Zeitintervall bei bekannten Anfangsbedingungen ein *Anfangswertproblem* dar:

Bestimme den Materialzustand $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})|_{t=t_{n+1}}$ zum Zeitpunkt $t = t_{n+1}$ aus (5.1.18) und den Evolutionsgleichungen für die Zustandvariablen bei gegebenen Anfangsbedingungen $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})|_{t=t_n} = (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$.

Hierbei ist $\boldsymbol{\sigma}_n \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_n)$, $\boldsymbol{\kappa}_n \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{u}_n)$ und $\mathbf{u}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(t_n)$. Man beachte, dass wir in diesem Abschnitt wie in Kap. 3 die symbolische Tensorschreibweise verwenden. Für die Implementierung im Rahmen der Finite Elemente Methode müssen die tensoriellen Beziehungen in entsprechende Beziehungen zwischen Matrizen gemäß den Definitionen aus Abschn. 4.2 übersetzt werden.

Um die Unterschiede der numerischen Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems näher zu erläutern, ersetzen wir (5.1.18) durch die allgemeine Form

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad (5.1.19)$$

mit der Anfangsbedingung (t_n, \mathbf{y}_n) . Eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist eine Funktion \mathbf{y} , welche die Differentialgleichung (5.1.19) für alle $t \in [t_n, t_{n+1}]$ löst und $\mathbf{y}(t_n) = \mathbf{y}_n$ erfüllt. Für gewöhnlich wird $\mathbf{y}(t_n) = \mathbf{y}_n$ selbst als Anfangsbedingung bezeichnet.

Man unterscheidet zwischen *expliziten* und *impliziten* Algorithmen zur numerischen Integration in der Zeit. Explizite Integrationsalgorithmen verwenden Größen am Anfang des Inkrements. Speziell wird beim *Euler-vorwärts-Verfahren* die Rate $\dot{\mathbf{y}}(t)$ approximiert durch

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \approx \frac{\mathbf{y}(t_n + \Delta t) - \mathbf{y}(t_n)}{\Delta t}. \quad (5.1.20)$$

Man beachte, dass die rechte Seite eine Funktion von t_n ist, dem Beginn des Inkrements. Setzt man $\mathbf{y}(t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_n$ und beachtet, dass definitionsgemäß $\dot{\mathbf{y}}(t_n) = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))$, so erhält man

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n). \quad (5.1.21)$$

Implizite Integrationsalgorithmen verwenden im Gegensatz expliziten Algorithmen Größen, die am Ende des Inkrements definiert sind. Da diese zunächst unbekannt sind, müssen diese iteriert bzw. zunächst vorgeschätzt und anschließend korrigiert werden. Speziell verwendet das *Euler-rückwärts-Verfahren* die Approximation

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \approx \frac{\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_{n+1} - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (5.1.22)$$

wodurch

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}). \quad (5.1.23)$$

Durch die Kombination beider Gleichungen (5.1.21) und (5.1.23) erhält man die *generalisierte Mittelpunktsregel*

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{f}_{n+\theta}, \quad (5.1.24)$$

worin

$$\mathbf{f}_{n+\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \theta \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) + (1 - \theta) \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \quad \text{mit } \theta \in [0, 1]. \quad (5.1.25)$$

Das *Crank-Nicolson-Verfahren* folgt aus der generalisierten Mittelpunktsregel durch Setzen von $\theta = \frac{1}{2}$.

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Problem zurück und betrachten einen typischen Vertreter der in Abschn. 3.3 behandelten elasto-plastischen Materialmodelle. Der Zustand des Materials zum Zeitpunkt $t = t_n \in [t_n, t_{n+1}]$ sei gegeben durch $(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$. Darüber hinaus sei $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ die infinitesimale totale Dehnung und $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ die plastische Dehnung zu diesem Zeitpunkt. Die zulässigen Zustände im Spannungsraum werden durch die Menge $\mathcal{A}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0\}$ mit einer Fließfunktion $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ definiert. Die elastische Dehnung und die Spannung bei $t = t_n$ sind bekanntermaßen Funktionen des Materialzustands:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_n^e. \quad (5.1.26)$$

\mathbf{C}^e sei die konstante isotrope elastische Steifigkeitsmatrix.

Ein Integrationsalgorithmus für elasto-plastische Materialmodelle bestimmt sodann den Zustand zum Zeitpunkt $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$ basierend auf den Evolutionsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\text{sym}} \dot{\boldsymbol{u}}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}} = \gamma \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}), \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = -\gamma \mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}), \quad (5.1.27)$$

mit $\nabla_{\text{sym}} \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\boldsymbol{u}} + \nabla \dot{\boldsymbol{u}}^{\text{T}})$, und erfüllt die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0, \quad \text{und} \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0, \quad (5.1.28)$$

ebenso wie die Konsistenzbedingung

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0, \quad (5.1.29)$$

mit $\dot{f} = D_{\boldsymbol{\sigma}} f : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + D_{\boldsymbol{\kappa}} f : \dot{\boldsymbol{\kappa}}$, und der Anfangsbedingung

$$\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}\}|_{t=t_n} = \{\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n\}. \quad (5.1.30)$$

Durch die zeitliche Diskretisierung (Abschn. 4.3) werden alle wesentlichen Variablen inkrementell zerlegt, z.B.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_n \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}(t_n). \quad (5.1.31)$$

Die Genauigkeit der Spannungsintegration hängt dann ab von der Genauigkeit bei der Berechnung des *Spannungsinkrements* definiert durch

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) dt, \quad (5.1.32)$$

welches als konstant über das Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ angenommen wird. Die Abhängigkeit der Spannung vom betrachteten Punkt bzw. Partikel wird hierbei stillschweigend hingenommen. Gleiches gilt für die Zustandsvariablen.

Für die Berechnung des Spannungsinkrements (5.1.32) auf der Grundlage von (5.1.18) nehmen wir an, dass sich aus der in den vorangegangenen Abschnitten behandelten iterativen Lösung des Gleichgewichtsproblems im Iterationsschritt i ein Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{u}^i$ ergeben hat. Hierbei handelt es sich um das kumulierte Verschiebungsinkrement gemäß (5.1.7) und nicht um das Verschiebungsinkrement $d\mathbf{u}^i$ des aktuellen Iterationsschritt, denn dieses steht in keiner Beziehung zu einem Gleichgewichtszustand. Zur Abkürzung der Schreibweise lassen wir den hochgestellten Index i weg und definieren das *totale Dehnungsinkrement* durch

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\text{sym}}(\Delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla(\Delta \mathbf{u}) + (\nabla(\Delta \mathbf{u}))^{\text{T}} \right). \quad (5.1.33)$$

Darüber hinaus sei die zeitliche Ableitung der Verschiebung im Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ konstant, so dass $\Delta \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} \Delta t$.

Explizite Integration (Substepping Algorithmus)

Die Anwendung des Euler-vorwärts-Verfahrens (5.1.21) auf das oben gestellte elasto-plastische Anfangswertproblem liefert

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (5.1.34)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) , \quad (5.1.35)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n - \Delta \gamma \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) , \quad (5.1.36)$$

mit $\Delta \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_n \Delta t$.

Wir betrachten nun den Fall einer plastischen Belastung, bei dem laut (3.3.13) die Bedingungen $f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) = 0$ und $\Delta \gamma > 0$ eingehalten werden müssen. In expliziten Algorithmen kann die erste Bedingung jedoch nicht exakt erfüllt werden. Stattdessen wird die Fließbedingung approximiert, nämlich durch ihre Linearisierung um den Zustand $(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$ zum Zeitpunkt t_n :

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}) \approx f(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) + \Delta f(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n) = 0 , \quad (5.1.37)$$

mit $\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} \dot{f} \Delta t$. Man definiert dann $f_n \stackrel{\text{def}}{=} f(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$, $\mathbf{m}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$ sowie $\mathbf{l}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\kappa}_n)$ und nimmt darüber hinaus an, dass der Zustand zum Zeitpunkt t_n auf der Fließfläche liegt, also $f_n = 0$ erfüllt ist. Unter Beachtung von

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{m}_n) \quad (5.1.38)$$

infolge (5.1.26) und (5.1.35) erhält man die diskrete bzw. inkrementelle Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned} \Delta f &= D_{\boldsymbol{\sigma}} f_n : \Delta \boldsymbol{\sigma} + D_{\boldsymbol{\kappa}} f_n : \Delta \boldsymbol{\kappa} \\ &= D_{\boldsymbol{\sigma}} f_n : \mathbf{C}^e : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{m}_n) - \Delta \gamma D_{\boldsymbol{\kappa}} f_n : \mathbf{l}_n \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

Der plastische Multiplikator folgt daraus zu

$$\Delta \gamma = \frac{D_{\boldsymbol{\sigma}} f_n : \mathbf{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{D_{\boldsymbol{\sigma}} f_n : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}_n + D_{\boldsymbol{\kappa}} f_n : \mathbf{l}_n} . \quad (5.1.40)$$

Einsetzen in (5.1.38) ergibt nach kurzer Umformung die folgende Aktualisierungsvorschrift für die Spannung:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}_n^{\text{ep}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (5.1.41)$$

also

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_n^{\text{ep}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} , \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_n^{\text{ep}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \mathbf{m}_n \otimes D_{\boldsymbol{\sigma}} f_n : \mathbf{C}^e}{D_{\boldsymbol{\sigma}} f_n : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}_n + D_{\boldsymbol{\kappa}} f_n : \mathbf{l}_n} \quad (5.1.42)$$

als elasto-plastischer Steifigkeitstensor. Dieser ist eine Tangente an $(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$ und konzeptionell identisch zur analytischen elasto-plastischen Tangentensteifigkeit definiert durch (3.3.29). Der Tensor \mathbf{C}_n^{ep} wird daher oft als *Kontinuumstangente* bezeichnet.

Man beachte, dass die oben durchgeführte Herleitung des Steifigkeitstensors vollkommen analog zur analytischen Herleitung im Abschn. 3.3.3 ist mit dem Unterschied, dass

Zeitableitungen von Größen durch Inkremente dieser Größen ersetzt wurden. Für finite, d.h. endlich große Inkremente ist diesem Fall jedoch nicht sichergestellt, dass sich der aktualisierte Zustand $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1})$ im zulässigen Bereich, d.h. auf oder innerhalb der Fließfläche befindet. Der mögliche Fehler kann reduziert werden, sofern das Zeitinkrement bzw. das totale Dehnungsinkrement in m_{sub} sog. *Subinkremente* oder *Substeps* zerlegt wird:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{m_{\text{sub}}} d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{mit} \quad d\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} m_{\text{sub}}^{-1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.1.43)$$

Die Spannung im $(i+1)$ -ten Subinkrement im inkrementellen Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ ist dann gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i + d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i, \quad \text{wobei} \quad \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^i d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k \quad (5.1.44)$$

und $i \in \{0, \dots, m_{\text{sub}} - 1\} \subset \mathbb{N}$. Die Substepping-Prozedur wird mit $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i=0} = \boldsymbol{\sigma}_n$ initialisiert und durch das Setzen von $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{m_{\text{sub}}}$ beendet.

Implizite Integration (Cutting-Plane Algorithmus)

Die Anwendung des Euler-rückwärts-Verfahrens (5.1.23) auf das elasto-plastische Anfangswertproblem liefert

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.1.45)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}} + \Delta \gamma \mathbf{m}_{n+1}, \quad (5.1.46)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n - \Delta \gamma \boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \quad (5.1.47)$$

worin $\Delta \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{n+1} \Delta t$, $\mathbf{m}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1})$ und $\mathbf{l}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1})$. Die beiden Gleichungen (5.1.46) und (5.1.47) sind so nicht lösbar, weil beide Seiten Funktionen von $t = t_{n+1}$ sind. Zur Lösung wird meistens ein *elasto-plastischer Operator-Split* vorgenommen. Dabei wird in einem *elastischen Prädiktor-Schritt* der neue Materialzustand elastisch vorgeschätzt und dieser anschließend in einem *plastischen Korrektor-Schritt* korrigiert.

Der elastisch vorgeschätzte Zustand (engl. *trial state*) ist definiert durch $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{tr}})$, wobei

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{tr}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\kappa}_n. \quad (5.1.48)$$

\mathbf{C}^e ist wiederum der konstante isotrope Elastizitätstensor. Bei elastischer Belastung gemäß (3.3.13) gilt

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{tr}}) < 0 \quad \text{und} \quad \Delta \gamma = 0, \quad (5.1.49)$$

so dass $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{p}}$, $\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n$ und $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}$.

Im Falle einer plastischen Belastung gilt konsequenterweise

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{tr}}) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta \gamma > 0, \quad (5.1.50)$$

d.h. bei plastischer Belastung liegt der elastisch vorgeschätzte Zustand außerhalb der Fließfläche und ist daher unzulässig. Zur Wiederherstellung der Konsistenz wird nun dieser vorgeschätzte Zustand zurück auf die Fließfläche projiziert (plastischer Korrektor). Das sich daraus ergebende Problem wird durch die Bestimmung der Größe des plastischen Multiplikators $\Delta\gamma$ bestimmt und besitzt die folgende Form:

$$\text{Finde } \Delta\gamma \in \mathbb{R}_+, \quad \text{so dass } f(\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma), \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)) = 0. \quad (5.1.51)$$

Sofern $\Delta\gamma$ bekannt ist, wird der Materialzustand durch das Setzen von $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma)$ und $\boldsymbol{\kappa}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)$ aktualisiert. Die Funktionen $\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma)$ und $\boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)$ sind darin gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma) = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e : \mathbf{m}_{n+1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma) = \boldsymbol{\kappa}_n - \Delta\gamma \mathbf{l}_{n+1}. \quad (5.1.52)$$

Das nichtlineare Problem (5.1.51) kann z.B. mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens analog zu dem im Abschn. 5.1 gelöst werden. Die hier vorgestellte Alternative, der sog. *Cutting-Plane Algorithmus*, integriert hingegen die Gleichungen

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma)}{d(\Delta\gamma)} = -\mathbf{C}^e : \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma), \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)), \quad (5.1.53)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)}{d(\Delta\gamma)} = -\mathbf{l}(\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma), \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)), \quad (5.1.54)$$

über ein Intervall der Länge $\Delta^2\gamma$ in Abhängigkeit von

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma), \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)\}|_{\Delta\gamma=0} = \{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{\text{tr}}\}. \quad (5.1.55)$$

$\Delta^2\gamma$ ist dabei gegeben durch die inkrementelle Zerlegung

$$\Delta\gamma^{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\gamma^i + \Delta^2\gamma. \quad (5.1.56)$$

Man setzt nun $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma^i)$, $\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^i \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma^i)$ und definiert $f_{n+1}^i \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f}(\Delta\gamma^i) \stackrel{\text{def}}{=} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^i)$. Die Initialisierung bei $i = 0$ bezieht sich auf den vorgeschätzten Zustand, und zwar ist

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)^{i=0} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \quad \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{i=0} = \boldsymbol{\kappa}_n, \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i=0} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}, \quad \text{und} \quad \Delta\gamma^{i=0} = 0. \quad (5.1.57)$$

Basierend auf (5.1.53) und (5.1.54) errechnen sich die Spannung und Zustandsvariablen im nächsten Iterationsschritt jeweils aus

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i - \Delta^2\gamma \mathbf{C}^e : \mathbf{m}_{n+1}^i, \quad (5.1.58)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^i - \Delta^2\gamma \mathbf{l}_{n+1}^i. \quad (5.1.59)$$

Die Fließbedingung in (5.1.51) wird an der Stelle $\Delta\gamma^i$ linearisiert:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{i+1} &\approx f_{n+1}^i + Df_{n+1}^i \Delta^2\gamma \\ &= f_{n+1}^i + \left(D_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^i : \frac{d\boldsymbol{\sigma}(\Delta\gamma)}{d\Delta\gamma} + D_{\boldsymbol{\kappa}} f_{n+1}^i : \frac{d\boldsymbol{\kappa}(\Delta\gamma)}{d\Delta\gamma} \right) \Delta^2\gamma \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.60)$$

Daraus ergibt sich der Zuwachs des plastischen Multiplikators zu

$$\Delta^2\gamma = \frac{f_{n+1}^i}{D_{\sigma}f_{n+1}^i : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}_{n+1}^i + D_{\kappa}f_{n+1}^i : \mathbf{l}_{n+1}^i}. \quad (5.1.61)$$

Das Abbruchkriterium des so definierten Iterationsalgorithmus für den plastischen Multiplikator lautet

$$|f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i, \boldsymbol{\kappa}_{n+1}^i)| \leq \varepsilon, \quad (5.1.62)$$

worin $\varepsilon > 0$ ein sinnvolles Toleranzmaß ist.

Der ermittelte Wert von $\Delta\gamma$ wird in (5.1.52) eingesetzt, um die Spannung und Zustandsvariablen zum Zeitpunkt $t = t_{n+1}$ zu ermitteln. Die Berechnung ihrer Inkremente ist dann trivial, nämlich $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n$ und $\Delta\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_{n+1} - \boldsymbol{\kappa}_n$.

Man bemerkt, dass sich bei der impliziten Integration im Gegensatz zur expliziten Integration eines Materialmodells nicht automatisch der benötigte Steifigkeitstensor ergibt. Zwar könnte man den Steifigkeitstensor aus der analytischen Formulierung des Materialmodells verwenden (sog. Kontinuumstangente; siehe oben), dieser ist jedoch nicht konsistent zum gewählten, notwendigerweise inkrementellen Algorithmus. Ein *konsistenter* bzw. *algorithmischer Steifigkeitstensor* berücksichtigt hingegen die finite Größe der Inkremente in der algorithmischen Behandlung des Materialmodells und stellt darüber hinaus die quadratische Konvergenzrate des Newton-Raphson-Verfahrens im Abschn. 5.1 sicher. Dieser algorithmische Steifigkeitstensor ist allgemein definiert durch die Fréchet-Ableitung

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{al}} \stackrel{\text{def}}{=} D\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \quad (5.1.63)$$

welche konsistent zum Integrationsalgorithmus für die Spannung ausgewertet werden muss.

Beispiel: von-Mises-Plastizität mit isotroper Verfestigung

Im Abschn. 3.3.3 hatten wir die wesentlichen Gleichungen der von-Mises-Plastizität mit isotroper Verfestigung als Beispiel für ein elasto-plastisches Materialmodell hergeleitet. Im Folgenden soll auf dieses Materialmodell der zuvor erläuterte implizite Integrationsalgorithmus zur Aktualisierung des Materialzustands (Spannung und Zustandsvariablen) angewendet werden.

Bekanntermaßen definiert die von-Mises-Plastizität die Fließgrenze als einzige Zustandsvariable vom Spannungstyp und die Fließbedingung besitzt die einfache Form $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma^y) = q - \sigma^y$. Die Verfestigungsregel ist linear und die Fließregel assoziiert, also

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}, \quad \text{und} \quad \dot{\sigma}^y = E^p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma E^p, \quad (5.1.64)$$

mit $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|$ und konstantem E^p .

Anwendung des Euler-rückwärts-Verfahrens (5.1.23) auf die Verfestigungsregel liefert

$$\sigma_{n+1}^y = \sigma_n^y + \Delta\gamma E^p, \quad (5.1.65)$$

mit $\Delta\gamma = \gamma_{n+1}\Delta t$. Gemäß des elasto-plastischen Operator-Splits beginnt die Berechnung mit dem elastischen Vorschätzen des neuen Materialzustands, $(\sigma_{n+1}^{\text{tr}}, (\sigma^y)_{n+1}^{\text{tr}})$, mit

$$\sigma_{n+1}^{\text{tr}} = \sigma_n + \mathbf{C}^e : \nabla_{\text{sym}}\Delta\mathbf{u} \quad \text{und} \quad (\sigma^y)_{n+1}^{\text{tr}} = \sigma_n^y. \quad (5.1.66)$$

Dieser vorgeschätzte Zustand wird für die Evaluation der Fließbedingung verwendet, d.h.

$$f(\sigma_{n+1}^{\text{tr}}, (\sigma^y)_{n+1}^{\text{tr}}) = q_{n+1}^{\text{tr}} - \sigma_n^y, \quad (5.1.67)$$

worin $q_{n+1}^{\text{tr}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{\text{tr}})_{\text{dev}}\|$.

Falls nun $f(\sigma_{n+1}^{\text{tr}}, (\sigma^y)_{n+1}^{\text{tr}}) < 0$, dann gilt $\Delta\gamma = 0$ und die Belastung ist elastisch, also ist auch $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$, $\sigma_{n+1}^y = \sigma_n^y$ und $\sigma_{n+1} = \sigma_n$. Falls andererseits $f(\sigma_{n+1}^{\text{tr}}, (\sigma^y)_{n+1}^{\text{tr}}) > 0$ gilt, dann ist $\Delta\gamma > 0$ und die Belastung ist plastisch. In diesem Fall liegt der vorgeschätzte Zustand außerhalb der Fließfläche.

Der plastische Korrektor-Schritt mit dem inkrementellen plastischen Multiplikator $\Delta\gamma$ als unbekannte Größe projiziert im Falle einer plastischen Belastung den vorgeschätzten Zustand zurück auf die Fließfläche. Die Verfestigungsregel ist linear in $\Delta\gamma$. Darüber hinaus gilt

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \mathbf{C}^e : \left(\nabla_{\text{sym}}\mathbf{u} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{n+1} \right) = \sigma_{n+1}^{\text{tr}} - \Delta\gamma 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{n+1} \quad (5.1.68)$$

und definitionsgemäß $(\sigma_{n+1})_{\text{dev}} = \|(\sigma_{n+1})_{\text{dev}}\| \mathbf{n}_{n+1}$, so dass

$$\mathbf{n}_{n+1} \equiv \frac{(\sigma_{n+1}^{\text{tr}})_{\text{dev}}}{\|(\sigma_{n+1}^{\text{tr}})_{\text{dev}}\|}. \quad (5.1.69)$$

Daraus folgt, dass die inkrementelle Fließregel

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{n+1} \quad (5.1.70)$$

ebenfalls linear in $\Delta\gamma$ ist und somit der plastische Multiplikator in geschlossener Form ohne Iteration berechnet werden kann. Die Rückprojektion nennt man in diesem Fall einen *Radial-Return*. Die inkrementelle Zerlegung (5.1.56) und die allgemeine Formel (5.1.56) liefern speziell

$$\Delta\gamma = \frac{q_{n+1}^{\text{tr}} - \sigma_n^y}{3G + E^p}. \quad (5.1.71)$$

Dieses Ergebnis folgt auch direkt aus der Konsistenzbedingung. Durch Einsetzen in (5.1.68) und (5.1.65) werden jeweils die Spannung und Fließgrenze aktualisiert.

Zu dem Update der Spannung gehört ein konsistenter bzw. algorithmischer elasto-plastischer Steifigkeitstensor gemäß (5.1.63). Die Formel für die Spannung (5.1.68) ist

wegen (5.1.66), (5.1.69) und (5.1.71) eine Funktion des totalen Dehnungsinkrements $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n$. Daher ist sie auch eine Funktion von $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}} - \Delta\gamma 2G\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{n+1}, \quad (5.1.72)$$

Aus Abschn. 2.2.4 wissen wir, dass jede Fréchet-differenzierbare Funktion zugleich Gâteaux-differenzierbar ist. Folglich kann der algorithmische Steifigkeitstensor aus

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{al}} : \boldsymbol{\eta} = D\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} : \boldsymbol{\eta} = \frac{d}{d\lambda} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \lambda\boldsymbol{\eta})|_{\lambda=0} \quad (5.1.73)$$

hergeleitet werden, worin $\boldsymbol{\eta}$ eine beliebige Richtung vom Dehnungstyp darstellt. Setzt man hier (5.1.72) ein, dann führt eine längere aber ansonsten unkomplizierte Herleitung auf den Ausdruck

$$\mathbf{C}_{n+1}^{\text{al}} = \mathbf{C}^e - \frac{6G^2}{3G + E^p} \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1} - 2G \frac{q_{n+1}^{\text{tr}} - \sigma_n^y}{q_{n+1}^{\text{tr}}} (\mathbf{1}_{\text{dev}} - \mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}), \quad (5.1.74)$$

mit dem durch (2.2.84) definierten Deviator-Einheitstensor vierter Stufe $\mathbf{1}_{\text{dev}}$. Gl. (5.1.74) gilt nur bei plastischer Belastung, wohingegen $\mathbf{C}_{n+1}^{\text{al}} = \mathbf{C}^e$ bei elastischer Belastung, Entlastung und neutraler Belastung gemäß (3.3.13).

Der durch (5.1.74) gegebene algorithmische Steifigkeitstensor $\mathbf{C}_{n+1}^{\text{al}}$ enthält gegenüber der Kontinuumsstangente \mathbf{C}^{ep} in (3.3.44) bzw. (5.1.42) einen zusätzlichen Term mit dem Faktor $(q_{n+1}^{\text{tr}} - \sigma_n^y)$. Geometrisch interpretiert stellt dieser Faktor den Abstand zwischen dem elastisch vorgeschätzten Spannungszustand und der Fließfläche dar. Bei großen Inkrementen (Zeitschritten) kann sich daher ein signifikanter Unterschied zwischen konsistent und inkonsistent ermittelter Steifigkeit einstellen. Für sehr kleine Inkremente gilt hingegen $q_{n+1}^{\text{tr}} \approx \sigma_n^y$ und daher $\mathbf{C}_{n+1}^{\text{al}} \approx \mathbf{C}_n^{\text{ep}} \approx \mathbf{C}^{\text{ep}}$.

5.2 Transiente Probleme

5.2.1 Implizite Zeitintegration

Wir betrachten die semi-diskrete schwache Form der Impulsbilanz (4.2.26) inklusive Trägheitsterme, also

$$\mathbf{f}^{\text{in}} - \mathbf{f}^{\text{ex}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{o}, \quad (5.2.1)$$

über eine gleichmäßige Sequenz $(t_0 = 0, t_1 = t_0 + \Delta t, \dots, t_{n+1} = t_n + \Delta t, \dots, t_{n_T} = T)$ von Zeitschritten. Sämtliche Terme in (5.2.1) seien zeitabhängig und globale Größen, wobei wir den Index g weglassen. Für den Zeitpunkt t_n sei ein Gleichgewichtszustand des materiellen Körpers, $\varphi(\mathcal{B}, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_n(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}$, ermittelt worden. Ein Lösungsverfahren für das mechanische Anfangsrandwertproblem ermittelt dann den Zustand zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ durch Lösen von (5.2.1) unter Berücksichtigung der Randbedingungen sowie der Anfangsbedingungen bei $t = t_n$.

Im Allgemeinen können für die Lösung, wie schon bei der Integration des Materialmodells in Abschn. 5.1.4, explizite oder implizite Integrationsverfahren angewendet werden. Wir beschränken uns hier auf das implizite *Newmark- β -Verfahren*. Dieses schreibt

die folgenden Integrationsregeln für eine zeitabhängigen Größe \mathbf{y} und deren erster Zeitableitung $\dot{\mathbf{y}}$ vor:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{y}}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \dot{\mathbf{y}}_n + \gamma \dot{\mathbf{y}}_{n+1} \right), \\ \mathbf{y}_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left((1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{y}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{y}}_{n+1} \right).\end{aligned}\quad (5.2.2)$$

Die *Newmark Parameter* γ und β bestimmen das Verhalten des Integrationsverfahren. Das Newmark- β -Verfahren heißt *unbedingt stabil* falls

$$\beta \geq \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{4}.\quad (5.2.3)$$

Sofern diese Bedingung eingehalten wird, gibt es keine Einschränkungen hinsichtlich der Größe des Zeitschritts Δt .

Zur Lösung von (5.2.1) wird nun angenommen, dass der globale Vektor der Knotenverschiebungen \mathbf{u}_{n+1} die primäre Unbekannte in jedem Zeitschritt ist. Unter Verwendung von (5.2.2) sowie den Definitionen

$$\begin{aligned}a_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta \Delta t^2}, & a_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma}{\beta \Delta t}, & a_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\beta \Delta t}, & a_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\beta} - 1, \\ a_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma}{\beta} - 1 & \text{und} & & a_5 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right)\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

können die Knotenbeschleunigungen und Knotengeschwindigkeiten jeweils durch

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \dot{\mathbf{v}}_{n+1}^* + a_0 \mathbf{u}_{n+1} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1}^* + a_1 \mathbf{u}_{n+1},\quad (5.2.5)$$

ausgedrückt werden, mit

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1}^* \stackrel{\text{def}}{=} -a_0 \mathbf{u}_n - a_2 \mathbf{v}_n - a_3 \dot{\mathbf{v}}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{n+1}^* \stackrel{\text{def}}{=} -a_1 \mathbf{u}_n - a_4 \mathbf{v}_n - a_5 \dot{\mathbf{v}}_n.\quad (5.2.6)$$

Sowohl $\dot{\mathbf{v}}_{n+1}^*$ als auch \mathbf{v}_{n+1}^* enthalten nur bekannte Größen. \mathbf{u}_{n+1} ist daher die einzige Unbekannte. Daher kann (5.2.1) zum Zeitpunkt $t = t_{n+1}$ als ein allgemein nichtlineares Gleichungssystem

$$\Psi_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathbf{D} \mathbf{v}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}^{\text{ex}}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{0},\quad (5.2.7)$$

geschrieben werden, wobei $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{v}}_{n+1}$, $\mathbf{v}(\mathbf{u}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}_{n+1}$, $\mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{in}}$ und $\mathbf{f}^{\text{ex}}(\mathbf{u}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ex}}$. Die Matrix \mathbf{D} bezeichnet hierbei eine zusätzliche Dämpfungsmatrix, die dem Gesamtsystem häufig aus numerischen Gründen hinzugefügt wird. Einsetzen von (5.2.5) liefert dann

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1} &= a_0 \mathbf{M} \mathbf{u}_{n+1} + a_1 \mathbf{D} \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}^{\text{ex}}(\mathbf{u}_{n+1}) \\ &\quad - \mathbf{M} (a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \mathbf{v}_n + a_3 \dot{\mathbf{v}}_n) - \mathbf{D} (a_1 \mathbf{u}_n + a_4 \mathbf{v}_n + a_5 \dot{\mathbf{v}}_n) \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

Falls $\mathbf{f}^{\text{in}}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}$ linear ist und $\mathbf{f}_{n+1}^{\text{ex}}$ verformungsunabhängig, so folgt

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{r}_{n+1},\quad (5.2.9)$$

worin

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D} + \mathbf{K}_{n+1} \quad (5.2.10)$$

die *effektive Steifigkeitsmatrix* bezeichnet, und

$$\mathbf{r}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ex}} + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_n + a_2 \mathbf{v}_n + a_3 \dot{\mathbf{v}}_n) + \mathbf{D}(a_1 \mathbf{u}_n + a_4 \mathbf{v}_n + a_5 \dot{\mathbf{v}}_n). \quad (5.2.11)$$

Man vergleiche das Ergebnis mit (4.4.4) bzw. (5.1.13).

Im nichtlinearen Fall wird das Newmark- β -Verfahren mit dem Newton-Raphson-Verfahren kombiniert, um auf iterativem Wege die Lösung \mathbf{u}_{n+1} zu bestimmen.